§. 3. Die goniometrischen Werthe im 2., 3. u. 4. Quadr.

Bezeichnen α_1, α_2, α_3, α_4 vier einander entsprechende Winkel des 1., 2., 3. u. 4. Q. u. α $(=\alpha_1)$ ihren bestimmenden Grundwinkel, so hat man (aus jeder trigonometrischen Tafel): (Fig. 50.)

a) Die Sinusse und Cosinusse

1. für alle spitzen od. Grundw. (0 bis 90°; W. d. 1. Q.) $=\alpha$ unmittelbar;
2. für alle stumpfen W. (90 bis 180°; W. d. 2. Q.) $=\alpha_2$ mittelbar durch die des zugehörigen Grundw. $180-\alpha_2$ und die aus der Fig. ersichtlichen Thatsachen, dass $\begin{cases} \sin.\ \alpha_2 = \ \ \sin.\ \alpha = \ \ \sin.(180-\alpha_2) \\ \cos.\ \alpha_2 = -\cos.\ \alpha = -\cos.(180-\alpha_2) \end{cases}$
3. für alle einfach überstumpfen W. (180 bis 270; W. d. 3. Q.) $=\alpha_3$ durch deren Grundwink. $=\alpha_3-180$ und das Gesetz . . . $\begin{cases} \sin.\ \alpha_3 = -\sin.\ \alpha = -\sin.(\alpha_3-180) \\ \cos.\ \alpha_3 = -\cos.\ \alpha = -\cos.(\alpha_3-180) \end{cases}$
4. für alle doppelt überstumpfen W. (270 bis 360°; W. d. 4. Q.) $=\alpha_4$ durch deren Grundwink. $=360-\alpha_4$ und das Gesetz . . . $\begin{cases} \sin.\ \alpha_4 = -\sin.\ \alpha = -\sin.(360-\alpha_4) \\ \cos.\ \alpha_4 = -\cos.\ \alpha = -\cos.(360-\alpha_4) \end{cases}$

d. h.: die Sinusse der beiden untern und die Cosinusse der beiden rechten Quadranten haben negative Lage u. Werthe; ein Gesetz, nach dem sich nun alle von sin. u. cos. bestimmbaren übrigen goniometr. Werthe richten müssen.

b) Die Tangenten, Secanten, Cotangenten etc.: Aus vorig. Sin. u. Cos. gemäs den Formeln 2-5 des folgenden Paragraphen.

Beispiele. *a*) für den 1. Q.: s. S. 6 u. 7. — *b*) für den 2. Q.: sin. 106°? $=\sin.(180-106)=\sin.74^0=0{,}961$* (s. Knt's 1. Rand); cos. 106° $=-\cos.74^0$; laut r. Rand des Knt's $=-0{,}276$; tg. 106° $\left(\text{laut 2. des folg. §.} = \dfrac{\sin.}{-\cos.}\right)$ $=-\text{tg}.74=-3{,}48$.

§. 4. Gegenseitige Abhängigkeit und Bestimmbarkeit der goniometrischen Linien.

1) $\sin.^2+\cos.^2=1$; $\sin.=\sqrt{1-\cos.^2}$; $\cos.=\sqrt{1-\sin.^2}$.

2) $\text{tg}.=\dfrac{\sin.}{\cos.}=\dfrac{\sin.}{\sqrt{1-\sin.^2}}=\dfrac{1}{\cot}=\sqrt{\sec.^2-1}$.

3) $\cot.=\dfrac{1}{\text{tg}.}$ (also = Reciproke der vorigen Formeln); $\text{tg}.\cot.=1$.

4) $\sec.=\dfrac{1}{\cos.}=\dfrac{1}{\sqrt{1-\sin.^2}}=\sqrt{1+\text{tg}.^2}$; $\cos.=\dfrac{1}{\sec.}$.

5) $\text{cosec}.=\dfrac{1}{\sin.}=\sqrt{1+\cot.^2}=\dfrac{\sec.}{\sqrt{\sec.^2-1}}$; $\sin.=\dfrac{1}{\text{cosec}.}$.

6) $\sin.(\alpha\pm\beta)=\sin.\alpha\cos.\beta\pm\sin.\beta\cos.\alpha$.

7) $\cos.(\alpha\pm\beta)=\cos.\alpha\cos.\beta\mp\sin.\alpha\sin.\beta$.

8) $\text{tg}.(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\text{tg}.\alpha\pm\text{tg}.\beta}{1\mp\text{tg}.\alpha\,\text{tg}.\beta}$.

9) $\sin.\tfrac{1}{2}\alpha=\sqrt{\dfrac{1-\cos.\alpha}{2}}$.

10) $\cos.\tfrac{1}{2}\alpha=\sqrt{\dfrac{1+\cos.\alpha}{2}}$.

11) $\begin{cases}\sin.2\alpha=2\sin.\alpha\cos.\alpha\\ \sin.\alpha=2\sin.\tfrac{1}{2}\alpha\cos.\tfrac{1}{2}\alpha\end{cases}$

12) $\begin{cases}\cos.2\alpha=1-2\sin.^2\alpha=2\cos.^2\alpha-1\\ \cos.^2\alpha=(1+\cos.2\alpha):2\end{cases}$

13) $\begin{cases}\sin.3\alpha=3\sin.\alpha-4\sin.^3\alpha\\ \sin.^3\alpha=(3\sin.\alpha-\sin.3\alpha):4\end{cases}$

14) $\begin{cases}\cos.3\alpha=4\cos.^3\alpha-3\cos.\alpha\\ \cos.\alpha^3=(3\cos.\alpha+\cos.3\alpha):4\end{cases}$

Hierzu für bg., bh. u. ch. (Bogen, Bogenhöhe oder Pfeil, und Chorde):

15) $\text{bg}.\alpha=\dfrac{\pi}{180}\alpha$. 16) $\text{bh}.\alpha=1-\cos.\tfrac{1}{2}\alpha$.

17) $\text{ch}.\alpha=2\sin.\tfrac{1}{2}\alpha$ oder $\sin.\alpha=\tfrac{1}{2}\text{ch}.2\alpha$.

B. Dreieckslehre (Trigonometrie).

a, *b*, *c* die drei Seiten; *A*, *B*, *C* deren Gegenwink.; h_b Höhenloth auf *b*; *F* Fläche.

Fig. 51.

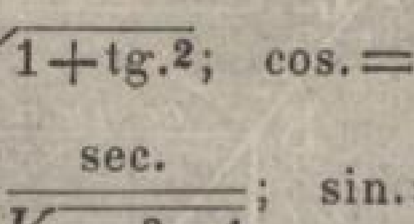


Fig. 52.

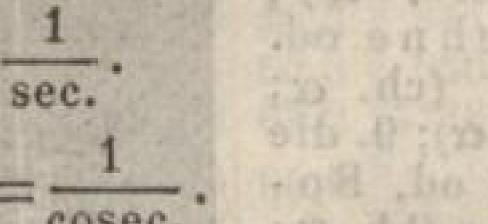
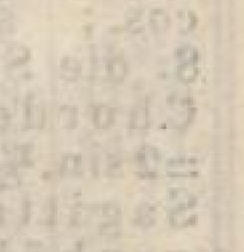


Fig. 53.



§. 5. Ueberhaupt.

1. $A+B+C=180^0$. Jeder Winkel = Supplement der Summe der beiden andern. 2. Aussenwinkel bei $A=B+C$. 3. $F=\dfrac{b\,.\,h_b}{2}$ od. $\dfrac{c\,.\,h_c}{2}$. 4. Wenn in