

Die merkwürdigen Punkte des Dreiecks und die durch sie bestimmten Linien.

§. 1.

Lehrsatz: Die Transversalen, wodurch die Winkel eines Dreiecks*) gehälftet werden, schneiden sich beziehlich in Einem Punkte. — Fig. I.

Vorbemerkung: Da ein Winkel nur durch Eine Gerade gehälftet werden kann, so ist der Lehrsatz gleichbedeutend mit folgendem: „Hälftet man zwei Winkel eines Dreiecks und verbindet den Punkt, worin die hälftenden Transversalen sich schneiden, mit dem Scheitel des dritten Winkels; so wird dadurch auch dieser gehälftet.“

Annahme: $\sphericalangle MAB = MAC$; $\sphericalangle MBA = MBC$; $\sphericalangle M'AB = M'AC$; $\sphericalangle M'BA = M'BC$
 $\sphericalangle M''AB = M''AC$; $\sphericalangle M''BA = M''BC$; $\sphericalangle M'''AB = M'''AC$; $\sphericalangle M'''BA = M'''BC$.

Satz: $\sphericalangle MCA = MCB$; $\sphericalangle M'CA = M'CB$; $\sphericalangle M''CA = M''CB$; $\sphericalangle M'''CA = M'''CB$

Beweis: Zieht man von den Punkten M M' M'' M''' auf die Seiten des Dreiecks die

Senkrechten Ma, Mb, Mc
M'a', M'b', M'c'
M''a'', M''b'', M''c''
M'''a''', M'''b''', M'''c'''

so sind auf Grund der Gleichheit je einer Seite und zwei gleichliegender Winkel

$$\begin{array}{ll} \triangle MAb \cong MAc & \triangle MBc \cong MBa \\ \triangle M'Ab' \cong M'Ac' & \triangle M'Bc' \cong M'Ba' \\ \triangle M''Ab'' \cong M''Ac'' & \triangle M''Bc'' \cong M''Ba'' \\ \triangle M'''Ab''' \cong M'''Ac''' & \triangle M'''Bc''' \cong M'''Ba''' \end{array}$$

Aus diesen Deckungen folgt:

$$Ma = Mb = Mc; M'a' = M'b' = M'c'; M''a'' = M''b'' = M''c''; M'''a''' = M'''b''' = M'''c'''$$

und daher sind wegen der Uebereinstimmung in zwei Seiten und dem der größeren von diesen gegenüberliegenden Winkel $\triangle MCA \cong MCB$; $\triangle M'CA \cong M'CB$; $\triangle M''CA \cong M''CB$; $\triangle M'''CA \cong M'''CB$ und daraus ergibt sich endlich $\sphericalangle MCA = MCB$; $\sphericalangle M'CA = M'CB$; $\sphericalangle M''CA = M''CB$; $\sphericalangle M'''CA = M'''CB$

*) Dreieck ist hier in dem allgemeinen Sinne des Dreiseits zu nehmen.

**) $\sphericalangle M'BA$ bezeichnet den Nebenwinkel von M'BA; überhaupt soll der hintergesetzte Punkt andeuten, daß nicht der Winkel selbst, sondern sein Nebenwinkel gemeint sei.