Weil nun $\sphericalangle BC\gamma' = AC\gamma'$, also auch Bogen $B\gamma' = A\gamma'$ ist, so wird die Sehne AB durch den Durchmesser $\gamma\gamma'$ gehälftet. Der Intersektionspunkt γ ist daher das Centrum des in Rede stehenden Kreises. Hieraus folgt nun erstens, daß die Punkte α, β, γ, in welchen der Kreis O die Centralen der Außenkreise zum zweiten Male schneidet, die Mitten dieser Centralen sind, und zweitens, daß je zwei Ecken des Dreiecks und die zwei Centren der entsprechenden Außenkreise in der Peripherie Eines Kreises liegen, dessen Durchmesser eben die Centrale dieser Außenkreise ist. So liegen die Punkte A, B, M', M'' ...... A, C, M', M''' ...... B, C, M'', M''' je in der Peripherie Eines Kreises.

Verbindet man γ' mit B, so ist $\sphericalangle \gamma'MB = MCB + CBM = \frac{1}{2}(ACB + CBA)$ und $\sphericalangle \gamma'BM = \gamma'BA + AB\gamma' = \gamma'CA = AB\beta' = \frac{1}{2}(ACB + CBA)$, daher $\sphericalangle \gamma'MB = \gamma'BM$, folglich $\gamma'M = \gamma'B$ und ebenso auch $= \gamma'A$; der durch die Punkte A, M und B gelegte Kreis hat also γ' zum Centrum. Weil nun aber $\sphericalangle MAM''' = R = MBM'''$ ist, so liegen auch die Punkte A, M, B und M''' in der Peripherie Eines Kreises, welcher aber mit dem eben bezeichneten derselbe ist, indem anders durch drei Punkte zwei verschiedene Kreise gelegt wären, was unmöglich ist. Man kann daher sagen, erstens, daß auch die drei Centralen, welche vom Centrum des Innenkreises zu den Centren der Außenkreise gezogen sind, von dem Kreise O in den Punkten α', β', γ' gehälftet werden; und zweitens, daß eben diese Punkte die Mittelpunkte von Kreisen sind, welche beziehlich durch zwei Dreiecksecken und die Centren derjenigen beiden Kreise gehen, durch welche die entsprechende Dreiecksseite innerlich berührt wird.

Faßt man das Gesagte zusammen; so ergibt sich das überraschende Resultat, daß die drei Ecken eines Dreiecks und die sechs Mittelpunkte der Centralen seiner einbeschriebenen Kreise in der Peripherie des einen umbeschriebenen Kreises liegen.

Zusatz III. Schließlich ist zu beachten, wie dieser zweite Lehrsatz mit dem ersten zusammenhängt, dergestalt, daß der eine sich aus dem andern als Folgerung ergibt. Wenn man sich nämlich — Fig. I — die Punkte a, b und c zu einem Dreieck verbunden denkt; so wird der Kreis M diesem Dreieck umbeschrieben sein: die Transversalen MA, MB und MC stehen aber, wie Jeder leicht übersieht, auf der Mitte der Seiten dieses Dreiecks abc senkrecht. Ebenso werden umgekehrt die Linien, gezogen vom Centrum des dem Dreieck abc umbeschriebenen Kreises nach den Ecken A, B und C des diesem Kreise umbeschriebenen Dreiecks ABC, die Winkel desselben hälften.

§. 3.

Lehrsatz: Die Höhen eines Dreiecks schneiden sich in Einem Punkte. — Fig. III a und b.

Annahme: $CD \perp AB$, $AE \perp BC$, $BF \perp CA$.

Satz: CD, AE und BF begegnen sich in demselben Punkte H.

Beweis: Man ziehe durch die Ecken A, B und C zu den gegenüberliegenden Seiten Parallele, welche sich in den Punkten I, K und L schneiden. Nun ist AB=LC und AB=CI, also auch LC=CI; in gleicher Weise ist IB=BK und KA=AL. Weil ferner die Höhen CD, AD und BF auf den Seiten des Dreiecks ABC beziehlich senkrecht stehen; so sind sie auch senkrecht auf den dazu parallel gezogenen Linien. Die Höhen des Dreiecks ABC stehen also auf den Mitten der Seiten des Dreiecks IKL senkrecht, sind mithin Linien, welche sich nach dem vorigen Lehrsatze in Einem Punkte treffen.

Zusatz I. Diesen Punkt H nennt man den Höhenpunkt des Dreiecks. Auch er liegt aus leicht zu übersehenden Gründen bei einem spitzwinkligen Dreieck innerhalb, bei einem stumpfwinkligen außerhalb, und beim rechtwinkligen ist er offenbar der Scheitel des rechten Winkels.