Schwerpunkt gezogenen Transversalen liegen und von diesem halb so weit entfernt sind, als auf der andern Seite desselben die Punkte, worin der um das Dreieck beschriebene Kreis von ihnen getroffen wird, in der Peripherie des Einen um das Mitteldreieck beschriebenen Kreises liegen."

Zusatz III. Sind — vergl. Fig. VIII — in der Peripherie eines Kreises O vier Punkte A, B, C, D beliebig gewählt und zu den Dreiecken ABC, ABD, DCA, DCB verbunden; so geben die Linien, welche je von den Mitten der Seiten, also von E, F, G, L aus, zu den Endpunkten der gegenüberliegenden Seiten gezogen sind, in ihren Intersektionen die Schwerpunkte S_1, S_2, S_3, S_4 dieser Dreiecke. Da nun $ES_1 : EC = ES_2 : ED = 1 : 3$ ist; so ist im Dreieck ECD die Linie $S_1S_2 \parallel CD$ und $= \frac{1}{3}CD$; ebenso ist $S_2S_3 \parallel BC$ und $= \frac{1}{3}BC$; $S_3S_4 \parallel AB$ und $= \frac{1}{3}AB$; $S_4S_1 \parallel DA$ und $= \frac{1}{3}DA$. Folglich ist $\square S_1S_2S_3S_4 \backsim ABCD$. Es läßt sich daher auch um das Viereck $S_1S_2S_3S_4$ ein Kreis s beschreiben, dessen Halbmesser ein Dritttheil vom Halbmesser des Kreises O ist. — Zieht man ferner von O aus durch s eine Gerade und bestimmt auf ihr einen Punkt o, so, daß $Oo : Os = 3 : 2$ sei, und beschreibt um o als Mittelpunkt mit einem Halbmesser, welcher gleich der Hälfte des Halbmessers vom Kreise O ist, einen Kreis, welcher die von O aus durch die Punkte S gezogenen Strahlen in den Punkten O_1, O_2, O_3, O_4 schneidet; so ist, da sich die Radien der Kreise o und s verhalten wie $3 : 2$ und da auch der Punkt O auf der Centrale so liegt, daß $Oo : Os = 3 : 2$ ist, auch $OO_1 : OS_1 = OO_2 : OS_2 = OO_3 : OS_3 = OO_4 : OS_4 = 3 : 2$ (vergleiche die Anmerkung zu §. 7). Eben dieses Verhältniß hat aber bei einem Dreieck die Entfernung des Mittelpunktes des umbeschriebenen Kreises vom Mittelpunkt des dem Mitteldreieck umbeschriebenen Kreises und vom Schwerpunkt. Die Punkte O_1, O_2, O_3, O_4 sind also die Mittelpunkte der Kreise, welche um die Mitteldreiecke der eben erwähnten Dreiecke sich beschreiben lassen. — Bestimmt man endlich auf der Linie Oso einen vierten Punkt h so, daß $hO : sO = 3 : 1$ ist und beschreibt man um h als Centrum mit einem Halbmesser, welcher dem des Kreises O gleich ist und daher zu dem des Kreises s sich verhält wie $3 : 1$; so werden von diesem Kreise die von O durch die Punkte S gezogenen Strahlen in den Punkten H_1, H_2, H_3, H_4 so getroffen, daß $OH_1 : OS_1 = OH_2 : OS_2 = OH_3 : OS_3 = OH_4 : OS_4 = 3 : 1$ ist, woraus folgt, daß die Punkte H die Höhenpunkte der Dreiecke ABC, ABD, DCA, DCB seien.

Weil nun für jedes Dreieck nur Ein Schwerpunkt, Ein Höhenpunkt, Ein Mittelpunkt des umbeschriebenen Kreises, Ein Mittelpunkt des seinem Mitteldreieck umbeschriebenen Kreises existirt; so kann man auch umgekehrt so sagen: „Wenn man in der Peripherie eines Kreises O beliebige vier Punkte A, B, C, D wählt, so geben diese zu dreien kombinirt vier Dreiecke, welchen der Punkt O als Mittelpunkt des umbeschriebenen Kreises gemein ist. Bestimmt man in einem jeden dieser Dreiecke den Schwerpunkt, den Mittelpunkt des seinem Mitteldreieck umbeschriebenen Kreises und den Höhenpunkt; so liegen die vier je gleichbenannten Punkte in der Peripherie Eines Kreises; die Halbmesser dieser drei Kreise sind 2, 3, 6 Sechstheile des Halbmessers des Kreises O und ihre Mittelpunkte liegen mit dem Mittelpunkte O in Einer Geraden und zwar in Entfernungen von diesem, die ebenfalls im Verhältniß von $2 : 3 : 6$ stehen.

§. 9.

Lehrsatz: Sind von den Ecken eines Dreiecks aus durch einen beliebigen Punkt der Ebene Transversalen gezogen; so werden durch diese die Seiten des Dreiecks in solche Abschnitte getheilt, daß, von irgend einem zu zählen ange-