fangen, das Produkt aus dem ersten, dritten und fünften Abschnitte gleich ist dem Produkte aus dem zweiten, vierten und sechsten — und umgekehrt: sind die Seiten eines Dreiecks je so in zwei Abschnitte getheilt, daß das Produkt aus dem ersten, dritten und fünften Abschnitte gleich ist dem Produkte aus dem zweiten, vierten und sechsten; so schneiden sich die von den Ecken des Dreiecks zu den Theilpunkten der gegenüberliegenden Seiten gezogenen Transversalen in Einem Punkte. — Fig. IX[a] und[b].

Annahme: Durch den Punkt P sind die Transversalen AE BF und CD gezogen.

Satz: $AD.BE.CF = DB.EC.FA$.

Beweis: Zieht man $FK \parallel CE$, so ist $\triangle FKP \backsim BEP$ und daher $FK : BE = FP : BP$; auch ist $\triangle FKA \backsim BEA$ und daher $EC : FK = AC : FA$. Durch Multiplikation dieser beiden Proportionen erhält man $EC : BE = \frac{FP}{BP} : \frac{FA}{AC}$. In gleicher Weise ist $AD : DB = \frac{FP}{BP} : \frac{CF}{AC}$. Dividirt man endlich diese Gleichungen durcheinander, so erhält man: $\frac{EC}{BE} : \frac{AD}{DB} = \frac{CF}{FA}$, woraus folgt: $DB.EC.FA = BE.CF.AD$.

Annahme: $AD.BE.CF = DB.EC.FA$.

Satz: Die Transversalen AE, BF und CD treffen sich in Einem Punkte P.

Beweis: Entweder treffen sich diese drei Transversalen in dem Einen Punkte P oder nicht. Gesetzt, es sei nicht der Fall, sondern die von A aus durch den Durchschnittspunkt P der beiden anderen gezogene Transversale schneide BC in einem Punkte U. Dann wäre, wie eben bewiesen, $AD.BU.CF = DB.UC.FA$; aber es ist nach der Annahme $AD.BE.CF = DB.EC.FA$.

Daher wäre, wenn man die Gleichungen durcheinander dividirte, $\frac{BU}{BE} = \frac{UC}{EC}$ d. h. ein ächter Bruch wäre gleich einem unächten, was unmöglich ist.

Zusatz I. Man nennt diesen Lehrsatz gewöhnlich den Bernouilli'schen, obwohl es ausgemacht ist, daß ihn der italiänische Geometer Ceva vor Johann Bernouilli bewiesen hat.

Zusatz II. Dieser Satz begreift die in den §§. 1—4 bewiesenen Lehrsätze über die merkwürdigen Punkte des Dreiecks als spezielle Fälle in sich, und zwar den ersten, dritten und vierten unmittelbar, den zweiten mittelbar.

Von den Transversalen des §. 4, welche von den Ecken zu den Mitten der Gegenseiten gezogen sind, ist das von selbst klar; denn indem — vergl. Fig. IV — angenommen wird, daß $AD = DB$, $BF = FC$, $CE = EA$ sei, so ist auch $AD.BF.CE = DB.FC.EA$ und folglich schneiden sich die Transversalen CD, BE und AF in Einem Punkte.

Leicht auch ergibt es sich für die Höhen. Da nämlich — vergl. Fig. III. — durch je zwei der Höhen ähnliche Dreiecke entstehen, durch CD und BF die Dreiecke CDA und ABF, durch CD und AE die Dreiecke CDB und AEB, durch BF und AE die Dreiecke CEA und CFB, so hat man die drei Verhältnißgleichungen

$$AD : AF = CA : AB$$
$$BE : BD = AB : CB$$
$$CF : CE = CB : CA$$

Multiplizirt man diese miteinander, so ist der Werth des auf der rechten Seite der Gleichung entstehenden Verhältnisses offenbar gleich 1, folglich ist auch $\frac{AD.BE.CF}{AF.BD.CE} = 1$ oder $AD.BE.CF = AF.BD.CE$ und daher schneiden sich die Höhen in Einem Punkte.