Annahme: Der Punkt P beliebig; $PD \perp AB$, $PE \perp AC$, $PF \perp CB$.

Satz: $AD^2+BF^2+CE^2=DB^2+FC^2+EA^2$.

Beweis. Verbindet man P mit den Ecken A, B und C; so ist nach dem pythagoräischen Lehrsatz

$$AD^2=AP^2-DP^2=EA^2+EP^2-DP^2$$
$$BF^2=BP^2-FP^2=DB^2+DP^2-FP^2$$
$$CE^2=CP^2-EP^2=FC^2+FB^2-EP^2.$$

Addirt man diese Gleichungen, so erhält man — nach geschehener Reduction auf der rechten Seite — die Gleichung: $AD^2+BF^2+CE^2=DB^2+FC^2+EA^2$.

Annahme: $AD^2+BF^2+CE^2=DB^2+FC^2+EA^2$; $PD \perp AB$, $PE \perp AC$, $PF \perp CB$.

Satz: Die Senkrechten PD, PE und PF schneiden sich in Einem Punkte P.

Beweis. Entweder konvergiren die Senkrechten in dem Einen Punkte P oder nicht. Gesetzt, es sei nicht der Fall, sondern die Senkrechte, gefällt von dem Interseftionspunkte P der beiden Senkrechten PD und PE auf die dritte Seite CB, begegne dieser in dem Punkte U. Dann wäre nach dem so eben bewiesenen Satze: $AD^2+BU^2+CE^2=DB^2+UC^2+EA^2$.
Aber nach der Annahme ist: $AD^2+BF^2+CE^2=DB^2+FC^2+EA^2$.
Daher wäre, wenn man diese Gleichungen voneinander subtrahirt $BU^2-BF^2=UC^2-FC^2$ d. h. eine negative Größe wäre an Werth gleich einer positiven, was unmöglich ist.

Zusatz I. Auch in diesem Lehrsatze sind die in den §§. 1—4 bewiesenen Sätze als spezielle Fälle enthalten.

Macht man nämlich erstens — Fig. I — $Ac=Ab=\frac{1}{2}(AB+AC-BC)$
$$Bc=Ba=\tfrac{1}{2}(AB+BC-AC)$$
und konsequent $Cb=Ca=\frac{1}{2}(AC+BC-AB)$

so ist $Ac^2+Ba^2+Cb^2=cB^2+aC^2+bA^2$; daher schneiden sich die auf den Seiten des Dreiecks in den Punkten a b und c errichteten Senkrechten in Einem Punkte M. Verbindet man nun aber M mit A, B und C; so ist $\left.\begin{array}{l}\triangle AMc \cong AMb\\ \triangle BMc \cong BMa\\ \triangle CMa \cong CMb\end{array}\right\}$ auf Grund der Gleichheit zweier Seiten und des der größeren von diesen gegenüberliegenden Winkels.

Daher ist $\measuredangle MAc=MAb$, $\measuredangle MBc=MBa$, $\measuredangle MCa=MCb$ d. h. es werden durch die von diesem Punkte M zu den Ecken des Dreiecks gezogenen Transversalen dessen Winkel gehälftet, woraus umgekehrt folgt, daß die die Winkel hälftenden Transversalen sich in dem Einen Punkte M schneiden. — Dasselbe läßt sich natürlich gerade so in Bezug auf die Punkte M′ M″ und M‴ nachweisen.

Hälftet man zweitens die Seiten des Dreiecks ABC in den Punkten D, E und F; so folgt ohne Weiteres, daß $AD^2+BF^2+CE^2=DB^2+FC^2+EA^2$ sei und darum schneiden sich also auch die auf den Mitten der Dreiecksseiten errichteten Senkrechten in Einem Punkte.

Zieht man drittens — Fig. III im Dreieck ABC die Höhen CD, AE und BF, so ist
$$AB^2+BC^2+CA^2=AB^2+BC^2+CA^2 \text{ und}$$
$$AE^2+BF^2+CD^2=BF^2+CD^2+AE^2$$
Subtrahirt man diese identischen Gleichungen; so erhält man:
$$(AB^2-AE^2)+(BC^2-BF^2)+(CA^2-CD^2)=(AB^2-BF^2)+(BC^2-CD^2)+(CA^2-AE^2) \text{ oder:}$$
$$BE^2+CF^2+AD^2=FA^2+DB^2+EC^2$$
und daher schneiden sich ebenfalls die Höhen des Dreiecks in Einem Punkte.

Endlich läßt sich noch der Satz über den Schwerpunkt darauf zurückführen. Bestimmte man nämlich auf den Seiten eines Dreiecks ABC die Punkte D, E und F so, daß