da aber $p(p-b)(p-c)-(p-a)(p-b)(p-c) = (p-b)(p-c)\{p-(p-a)\} = a(p-b)(p-c)$

und $p(p-a)(p-c)+p(p-a)(p-b) = p(p-a)\{p-c+p-b\} = ap(p-a)$

und $p(p-a)(p-b)(p-c) = \triangle^2$ ist, so ergibt sich

$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}+\frac{1}{p} = a\frac{\{(p-b)(p-c)+p(p-a)\}}{\triangle^2} = \frac{abc}{\triangle^2}.$$

§. 12.

Um zunächst ϱ zu berechnen, geht man aus von der identischen Gleichung — vergl. Fig. I —

$$\triangle ABC = \triangle OBC + \triangle OAC + OAB$$

und substituirt hierin für jedes der Theildreiecke den Ausdruck seines Flächeninhalts. Dadurch erhält man: $\triangle = \frac{a\varrho}{2}+\frac{b\varrho}{2}+\frac{c\varrho}{2} = \left(\frac{a+b+c}{2}\right)\varrho = p\varrho$, mithin $\varrho = \frac{\triangle}{p}$ . . . . (1)

d. h. der Radius des Innenkreises wird erhalten, indem man den Flächeninhalt des Dreiecks durch dessen halben Umfang dividirt. — Sind daher um den gemeinsamen Kreis M die Dreiecke $A'B'C'$ — $A''B''C''$ — $A'''B'''C'''$ u. s. w. beschrieben und sind beziehlich p' p'' p''' u. s. w. die halben Umfänge dieser Dreiecke; so ist der Halbmesser des Kreises M

$$\varrho = \frac{\triangle A'B'C'}{p'} = \frac{\triangle A''B''C''}{p''} = \frac{\triangle A'''B'''C'''}{p'''} = \dots\dots$$

woraus folgt: $\triangle A'B'C' : \triangle A''B''C'' : \triangle A'''B'''C''' : \dots = p' : p'' : p''' : \dots = 2p' : 2p'' : 2p''' : \dots$

d. h. die Flächenräume solcher Dreiecke verhalten sich wie ihre Umfänge. — Umgekehrt, hat man Dreiecke, deren Flächenräume im einfachen geraden Verhältniß ihrer Umfänge stehen; so sind die in sie zu beschreibenden Kreise gleich. — Es führt das zu der Frage, durch welche Formel der Zusammenhang des Flächeninhalts eines Dreiecks mit seinem Umfange ausgedrückt werde? Da

$\triangle^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$ und — vergl. Fig. I und §. 1 Zusatz II — $\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{Mc}{Ac} = \frac{\varrho}{p-a}$

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{Ma}{Ba} = \frac{\varrho}{p-b}$$

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{Mb}{Cb} = \frac{\varrho}{p-c}$$

ist; so folgt: $\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{B}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{\varrho^3}{(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{p\varrho^3}{\triangle^2} = \frac{p}{\triangle^2}\cdot\frac{\triangle^3}{p^3} = \frac{\triangle}{p^2}$, daher

$$\triangle = p^2\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{B}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{C}{2} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (2)$$

Aus dieser einfachen Formel ersieht man, daß der Radius $\frac{\triangle}{p}$ für alle diejenigen Dreiecke dieselbe Größe haben wird, bei denen das Produkt $p\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{B}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{C}{2}$ gleichen Werth hat.

Ist der Flächeninhalt des Dreiecks nicht direkt gegeben oder schon berechnet; so wird man sich zur Berechnung des Radius ϱ der Formel $\varrho = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$ . . . . (3)