Gleichungen, durch welche der Zusammmenhang zwischen den Differenzen der Radien ausgedrückt wird.

Für die reziproken Werthe der Radien geben die Relationen (5):

$$\frac{1}{\varrho'} = \frac{p-a}{\triangle},\quad \frac{1}{\varrho''} = \frac{p-b}{\triangle},\quad \frac{1}{\varrho'''} = \frac{p-c}{\triangle}$$

Addirt man diese, indem man zugleich für $\triangle$ seinen Werth ϱp einsetzt, so wird:

$$\frac{1}{\varrho'} + \frac{1}{\varrho''} + \frac{1}{\varrho'''} = \frac{1}{\varrho} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

d. h. der reziproke Werth des Radius des Innenkreises ist gleich der Summe der reziproken Werthe der Radien der Außenkreise.

Dieselbe Gleichung, der man auch die Form $\frac{\varrho}{\varrho'} + \frac{\varrho}{\varrho''} + \frac{\varrho}{\varrho'''} = 1$ geben kann, ergibt sich durch die Division der Relationen (11) und (12).

In ähnlicher Weise findet sich, da $\varrho = \frac{\triangle}{p} = \frac{ah'}{2p} = \frac{bh''}{2p} = \frac{ch'''}{2p}$

und folglich $\frac{1}{h'} = \frac{a}{2p\varrho}$, $\frac{1}{h''} = \frac{b}{2p\varrho}$, $\frac{1}{h'''} = \frac{c}{2p\varrho}$ ist, die Gleichung:

Ebenso ist

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{h'} + \frac{1}{h''} + \frac{1}{h'''} &= \frac{1}{\varrho} \\ \frac{1}{h''} + \frac{1}{h'''} - \frac{1}{h'} &= \frac{1}{\varrho'} \\ \frac{1}{h'} + \frac{1}{h'''} - \frac{1}{h''} &= \frac{1}{\varrho''} \\ \frac{1}{h'} + \frac{1}{h''} - \frac{1}{h'''} &= \frac{1}{\varrho'''} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 16^{*})$$

woraus unter Anderem die merkwürdige Relation

$$\frac{1}{\varrho'} + \frac{1}{\varrho''} + \frac{1}{\varrho'''} = \frac{1}{h'} + \frac{1}{h''} + \frac{1}{h'''} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

sich ergibt.

Endlich ist gemäß den Gleichungen (1) und (5)

$$\varrho' + \varrho'' + \varrho''' - \varrho = \triangle\left(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} - \frac{1}{p}\right) = \triangle \,.\, \frac{abc}{\triangle^2} = \frac{abc}{\triangle} \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

---

*) Dieses System der Gleichungen zwischen den Höhen eines Dreiecks und den Halbmessern seiner einbeschriebenen Kreise ist eine spezielle Anwendung des allgemeinen Theoremes: „Wenn von einem Punkte in der Ebene eines Dreiecks Senkrechte auf dessen Seiten herabgelassen werden; so ist die Summe der Verhältnisse, die je aus diesen Senkrechten und den entsprechenden Höhen gebildet sind, gleich 1; und zwar sind diese Verhältnisse alle im positiven Sinne zu nehmen, so lange der Punkt innerhalb des Dreiecks liegt; dagegen ist je eines derselben, das nämlich aus entgegengesetzt gerichteten Linien gebildet ist, negativ, wenn der Punkt außerhalb des Dreiecks liegt."