§. 14.

Um den Radius des dem Dreieck ABC umbeschriebenen Kreises zu berechnen, ziehe man — Fig. XI — den Durchmesser CN, die Höhe $CD = h'''$ und verbinde N mit A. Da nun $\sphericalangle CAN = R = CDB$ und $\sphericalangle CNA = CBD$ ist, so ist $\triangle CAN \backsim CDB$ und daher ist:

$$CA : CD = CN : CB \quad \text{oder}$$
$$b : h''' = 2r : a$$

$$\left.\begin{aligned} \text{mithin } r &= \frac{ab}{2h'''} \\ \text{ebenso ist } r &= \frac{ac}{2h''} \\ r &= \frac{bc}{2h'} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (19)$$

Nun ist aber $ah' = bh'' = ch''' = 2\triangle$, daher: $r = \dfrac{abc}{4\triangle}$ . . . . (20)

d. h. der Radius des umbeschriebenen Kreises wird berechnet, indem man das Produkt der 3 Seiten durch den vierfachen Flächenraum des Dreiecks dividirt. — Diese Formel lehrt, daß bei Dreiecken von gleichem Inhalte die Radien der umbeschriebenen Kreise sich verhalten, wie die Produkte ihrer Seiten. Schreibt man sie so:

$$abc = \triangle . 4r$$

so will das sagen, daß das rectanguläre Prisma, welches aus den Seiten eines Dreiecks (als Dimensionen) gebildet ist, an Volumen demjenigen Prisma gleichkommt, dessen Grundfläche das Dreieck und dessen Höhe der doppelte Durchmesser des umbeschriebenen Kreises ist.

Da $\triangle = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}$ ist; so kann man auch schreiben:

$$r = \frac{abc}{\sqrt{\{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)\}}} \quad \ldots \ldots \quad (21)$$

und diese Formel dient zur direkten Berechnung des Radius aus den Seiten.

Zieht man — Fig. XV — $OE \perp AB$; so ist $\dfrac{AE}{AO} = \sin AOE = \sin\dfrac{AOE}{2} = \sin C$; daher ist

$$r = \frac{c}{2\sin C} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{a}{2\sin A} \quad \ldots \ldots \quad (22)$$

Setzt man in Gleichung (20) statt $\triangle$ seinen Werth $p\varrho$ ein; so wird $r = \dfrac{abc}{4p\varrho}$ und daher

$$r\varrho = \frac{abc}{4p} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (23)$$

Darin liegt ausgesprochen, daß das Rechteck gebildet aus den Radien des ein- und umbeschriebenen Kreises für alle diejenigen Dreiecke konstant sei, deren Seiten dem System der unbestimmten Gleichungen

$$a+b+c = a'+b'+c'$$
$$abc = a'b'c'$$

genügen.

Endlich führt die Vergleichung der Relationen (18) und (20) zu der einfachen Formel:

$$\varrho'+\varrho''+\varrho'''-\varrho = 4r \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (24)$$