die Maßbestimmung der übrigen Tonintervalle zum größten Theil modificiert werden muß, z. B. das der Quinte, wenn man dies Intervall nach dem Vorgange Euler's durch den Logarithmus des Schwingungsverhältnisses (dividiert durch den log 2) ausdrückt, in 0,58048, während es jetzt $= 0{,}58496$ angenommen wird. Zugleich ergiebt sich dann

2) von selbst, daß in dem einen wie in dem anderen Falle die sogenannte Temperatur überflüßig wird, indem man nach beiden Tonsystemen Intervalle gewinnt, die in jeder Tonart brauchbar sind.

Ueber die Richtigkeit dieser Behauptung mag man sich aus deren Begründung im Abschnitt III. überzeugen; die nachfolgende Abhandlung hat ihren Zweck erreicht, wenn es ihr gelingt, die Aufmerksamkeit auf diesen Gegenstand zu lenken und namentlich Mathematiker zu weiteren Untersuchungen zu veranlaßen, ob die bisher übliche Theorie über die Bestimmung der Tonintervalle festgehalten werden darf.

I. Abschnitt.

Aeltere und neuere Bestimmung der Töne und ihre Intervalle.

§. 1.

Macht ein tönender Körper A in einer Sekunde a Schwingungen, ein anderer B in derselben Zeit b Schwingungen, so heißen a und b die absoluten Schwingungszahlen der beiden zugehörigen Töne, deren Höhe oder Tiefe bekanntlich durch erstere bestimmt wird. Ihr Verhältnis ist also a : b. Dividiert man beide Schwingungszahlen a und b durch a, so ist das Verhältnis dieser Töne $= 1 : \frac{b}{a}$, d. h. in derselben Zeit, in welcher der erste eine Schwingung macht, macht der zweite $\frac{b}{a}$. Wird $\frac{b}{a}$ in den kleinsten Zahlen $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ ausgedrückt, so heißt dieser Ausdruck $\frac{\beta}{\alpha}$ die relative Schwingungszahl des zweiten Tons in Bezug auf den ersten, welcher der Grundton genannt wird. Die relative Schwingungszahl irgend eines Tons in Bezug auf einen andern (Grundton) wird also bestimmt durch den in den kleinsten Zahlen ausgedrückten Quotienten der absoluten Schwingungszahlen dieser beiden Töne. Durch die relativen Schwingungszahlen wird die Höhe der Töne bestimmt.

Zwei Töne A und B sind an Höhe einander gleich, wenn der Exponent ihrer relativen Schwingungszahlen derselbe ist; der Ton A ist dagegen höher als B, wenn der Exponent der zu A gehörigen relativen Schwingungszahl größer ist, als der Exponent der relativen Schwingungszahl von B. Ist die relative Schwingungszahl eines Tons $= 2$, so heißt dieser bekanntlich die Oktave des Grundtons; hat er den Werth von $^3/_2$, so heißt er die Quinte u. s. w.

Die Differenz zweier Töne heißt ihr Intervall. Daß das Intervall zweier Töne nicht durch die Differenz ihrer zugehörigen Schwingungszahlen unmittelbar bestimmt werden kann, läßt sich leicht zeigen. Ist nämlich G der Grundton, A der erste abgeleitete Ton mit der relativen Schwingungszahl $= 2$, B der zweite abgeleitete Ton mit der relativen Schwingungszahl $= 4$, C der dritte $= 8$, so ist nach dem Vorigen A die Oktave von G, B die Oktave von A und C die Oktave von B; die Differenz der relativen Schwingungszahlen zwischen B und $A = 2$, zwischen C und $B = 4$. Sollten also diese Differenzen als die resp. Intervalle der angenommenen Töne anzusehen sein, so müßte unser Ohr das Intervall der zweiten Oktave zwischen B und C als ein doppelt so großes auffaßen wie das zwischen A und B, während nach der Erfahrung unser Ohr die Intervalle aller Oktaven als gleiche Intervalle empfindet und innerhalb des einen nicht mehr und nicht weniger Töne unterscheidet als innerhalb des andern. Die Maßbestimmung des Intervalls zweier beliebiger Töne mittelst ihrer relativen Schwingungszahlen muß also auf einem anderen Wege gefunden werden. Ist nämlich $\frac{\beta}{\alpha}$ die relative Schwingungszahl des Tons A in Bezug auf den Grundton G und wird auf diesen Ton A als neuen Grundton ein Ton B bezogen, der zu dem ersteren wiederum die relative Schwingungszahl $\frac{\beta}{\alpha}$ hat, so hat B offenbar denselben Abstand von A, wie A von G, also ein doppelt so großes Intervall von G wie A. Denn die relative Schwingungszahl von B war $= \frac{\beta}{\alpha} \cdot A = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\beta}{\alpha} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2$, während die von $A = \frac{\beta}{\alpha}$ war. Wird nun weiter ein Ton C bestimmt, der sich ebenso von B als Grundton ableitet, wie B von A, oder A von G, so ist