$C = \frac{\beta}{\alpha} \cdot B = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^3$ und hat also ein dreimal so großes Intervall von G wie A von G u. s. w. Die Intervalle werden nach dieser Betrachtungsweise offenbar durch die (ganzen) Exponenten der relativen Schwingungszahlen bestimmt. Wird nun $\frac{\beta}{\alpha}$ so bestimmt, daß sowohl der dieser relativen Schwingungszahl zugehörige Ton A als der mit $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2$ bezeichnete B dem Ohre vernehmbare Töne sind, so laßen sich zwischen diesen Tönen A und B noch unzählig viele andere Töne denken, die höher als A und tiefer als B liegen, und deren relative Schwingungszahlen wir allgemein mit $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^x$ bezeichnen können, insofern x eine Veränderliche ausdrückt zwischen den Grenzen 1 und 2. Ebendieselbe Betrachtung ergiebt sich für die oben angeführten Töne B und C und so fort. Gilt $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^v$ als der Repräsentant aller in der Musik möglichen Töne und wird v auf die Grenzen eingeschränkt, welche die Akustik lehrt, so läßt sich durch denselben jeder beliebige Ton mit der relativen Schwingungszahl $\frac{\gamma}{\delta}$ ausdrücken. Wird nämlich das Intervall des durch $\frac{\beta}{\alpha}$ bestimmten Tons vom Grundton als Maßeinheit angenommen, so wird das dem durch $\frac{\gamma}{\delta}$ bestimmten Ton zugehörige Intervall in Bezug auf dieselbe Maßeinheit bestimmt durch die Gleichung: $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^v = \frac{\gamma}{\delta}$, woraus $v = \dfrac{\log\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)}{\log\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}$. Das Intervall eines Tons vom Grundton wird also bestimmt durch den Quotienten aus dem Logarithmus der relativen Schwingungszahl eben dieses Tons dividiert durch den Logarithmus der relativen Schwingungszahl eines andern Tons, dessen Intervall vom Grundton als Maßeinheit genommen ist. Wird in dieser Formel $\frac{\beta}{\alpha} = 2$ gesetzt, also das Intervall der Oktave als Maßeinheit genommen, so wird $v = \dfrac{\log\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)}{\log 2}$. Diese wichtige, zuerst von Euler aufgefundene Formel weist einfach und klar den Zusammenhang zwischen den relativen Schwingungszahlen zweier Töne und ihres Intervalles nach und bietet ein leichtes Mittel dar, die Intervalle von Tönen zu vergleichen, sobald ihre relativen Schwingungszahlen festgestellt sind. Da die Logarithmen den Alten nicht bekannt waren, so mußten sie natürlich dieses Vortheils in der Berechnung der Intervalle entbehren und die mühsamere Rechnung mit Proportionen anwenden.

§. 2.

Nach der Ueberlieferung der Alten waren es die Pythagoreer, welche die relativen Schwingungszahlen der in der Musik gebräuchlichen Töne festgestellt haben. Nach Böckh's „Philolaos", Berlin 1819, hatte die von ihnen bestimmte diatonische Tonleiter folgende Gestalt:

Quinte	c	νήτη	c	
				8 : 9 Ton
	H^b	παρανήτη	H^b	
				8 : 9 Ton
	As	τρίτη	(Gis)	
				243 : 256 Halbton
	G	παραμέση	G	
				8 : 9 Ton
Quinte / Quarte	F	μέση	F	
				8 : 9 Ton
Quarte	Es	λιχανός	(Dis)	
				8 : 9 Ton
	Des	παρυπάτη	(Cis)	
				243 : 256 Halbton.
	C	ὑπάτη	C	

Anmerkung. Daß die zur Linken von mir gegebene Bezeichnung der Töne richtiger ist als die zur Rechten beigefügte von Böckh, ergiebt sich aus dem Folgenden.

Außer diesen Tönen werden noch als kleinere Intervalle unterschieden pag. 79 die Apotome, deren Verhältnis ausgedrückt ist durch 2048 : 2187 und das Komma, das, in den kleinsten Zahlen ausgedrückt, das Verhältnis 524288 : 531441 giebt. Vertauschen wir in obiger Tabelle die Reihenfolge der Töne von oben nach unten, so wird sie in jetzt üblicher Folge, C als Grundton genommen, diese Gestalt annehmen:

$$\underbrace{C \quad D}_{9/8}\underbrace{\quad E}_{9/8}\underbrace{\quad F}_{256/243}\underbrace{\quad G}_{9/8}\underbrace{\quad A}_{9/8}\underbrace{\quad H}_{9/8}\underbrace{\quad c}_{256/243}$$