Möhring, J. N.

Zur Theorie der Musik.

Programm

des

Johanneums zu Lüneburg

Ostern 1855.

Inhalt.

Lüneburg.
Druck der von Sternschen Buchdruckerei.
1855.

Zur Theorie der Musik.

Von J. N. Möhring, Dr.

Während die praktische Musik in unserm Jahrhundert überall mit großer Vorliebe von allen Künsten am meisten gehegt und gepflegt wird, hat die theoretische Behandlung derselben (mit Ausnahme der Kompositionslehre) in Deutschland wenige in wissenschaftlicher Beziehung nennenswerthe Bearbeiter gefunden. Zu letzteren gehört Opelt, dessen neueste Schrift „Theorie der Musik" 1852 erschienen, worüber die Allgemeine Monatsschrift, Juni 1853, referiert. Bald darauf erschien die Abhandlung vom Professor Drobisch „Ueber musikalische Tonbestimmung und Temperatur" Abh. d. K. S. Ges. d. Wißenschaft IV.

Diese durch seltene Klarheit, sowie durch große Gründlichkeit und Reichhaltigkeit, ausgezeichnete Schrift ist ohne Frage die bedeutendste, die seit Euler's „Tentamen novae theoriae musicae" auf diesem Felde der Litteratur erschienen ist. Daß die genannten Vorzüge dieser Schrift in vollem Maße zukommen, wird Niemand verkennen, der sie selber studieren will; von der Reichhaltigkeit derselben wird schon eine kurze Inhaltsangabe überzeugen.

Das Werk zerfällt in 4 Abschnitte, denen 2 Anhänge beigefügt sind.

I. Bestimmung der Töne aus ihren einfachsten Schwingungsverhältnissen.
II. Bestimmung der Tonintervalle.
III. Von der Nothwendigkeit der Temperatur überhaupt, insbesondere der gleichschwebenden.
IV. Von den verschiedenen Arten der gleichschwebenden Temperatur, mit Tabellen für die Intervalle bei $q = {}^{7}/_{12} = {}^{11}/_{19} = {}^{18}/_{31} = {}^{25}/_{43} = {}^{43}/_{74}$; ferner bei $q = {}^{24}/_{41} = {}^{31}/_{53} = {}^{69}/_{118}$.

Anhang I. Ueber die bestmögliche akustische Bestimmung der erhöheten und erniedrigten Töne.
II. Ueber Newtonsche Analogie zwischen Farben- und Tonverhältnissen.

Dies ist im kurzen der Hauptinhalt dieser Schrift, auf die wir übrigens auch diejenigen verweisen, welche etwa an der obigen Behauptung Anstoß genommen haben, daß die theoretische Bearbeitung der Musik, die sogenannte Kanonik, mit der praktischen und technischen Ausbildung derselben nicht gleichen Schritt gehalten habe.

Die nachfolgende Abhandlung hat denselben Stoff zum Gegenstande und wird ungefähr denselben Gang in der Entwickelung desselben befolgen, und zwar in 3 Abschnitten.

I. Aeltere und neuere Bestimmung der Töne und ihrer Intervalle.
II. Ueber Temperatur in der neueren Musik.
III. Vergleichung des alten und neueren Tonsystems und Resultat derselben.

Der Verfaßer dieser Abhandlung wurde zur Veröffentlichung derselben hauptsächlich durch zwei Gründe bestimmt. Einmal lag es ihm ob, die Schrift des Prof. Drobisch und deren Bedeutung dem einen oder dem anderen zugänglich zu machen; zweitens in Beziehung auf den Abschn. III. diejenigen Resultate darzulegen, auf die der Verfaßer beim Studium dieses Gegenstandes durch eigenes Nachdenken gekommen ist.

Diese Resultate, die auf einem bisher, soviel mir bekannt, noch nicht betretenen Wege gewonnen, laßen sich kurz so aussprechen:

1) Die bis jetzt in den Lehrbüchern der Physik festgestellte Maßbestimmung der Tonintervalle bedürfen einer Modification. Hält man nämlich an dem Verhältnis der absoluten Schwingungszahlen 1) zwischen Grundton und Oktave = 1 : 2, und 2) zwischen Grundton und Quinte = 2 : 3 fest, so folgt daraus mit Konsequenz dieselbe Maßbestimmung der Intervalle für die übrigen Töne der Skala, wie sie uns von den Pythagoreern überliefert worden ist; soll dagegen die jetzt übliche Maßbestimmung für das Verhältnis des Grundtons zur großen Terz = 4 : 5 als Norm angesehen werden, so ergiebt sich, daß

die Maßbestimmung der übrigen Toninterwalle zum größten Theil modificiert werden muß, z. B. das der Quinte, wenn man dies Intervall nach dem Vorgange Euler's durch den Logarithmus des Schwingungsverhältnisses (dividiert durch den log 2) ausdrückt, in 0,58048, während es jetzt = 0,58496 angenommen wird. Zugleich ergiebt sich dann

2) von selbst, daß in dem einen wie in dem anderen Falle die sogenannte Temperatur überflüßig wird, indem man nach beiden Tonsystemen Intervalle gewinnt, die in jeder Tonart brauchbar sind.

Ueber die Richtigkeit dieser Behauptung mag man sich aus deren Begründung im Abschnitt III. überzeugen; die nachfolgende Abhandlung hat ihren Zweck erreicht, wenn es ihr gelingt, die Aufmerksamkeit auf diesen Gegenstand zu lenken und namentlich Mathematiker zu weiteren Untersuchungen zu veranlaßen, ob die bisher übliche Theorie über die Bestimmung der Toninterwalle festgehalten werden darf.

I. Abschnitt.

Aeltere und neuere Bestimmung der Töne und ihre Intervalle.

§. 1.

Macht ein tönender Körper A in einer Sekunde a Schwingungen, ein anderer B in derselben Zeit b Schwingungen, so heißen a und b die absoluten Schwingungszahlen der beiden zugehörigen Töne, deren Höhe oder Tiefe bekanntlich durch erstere bestimmt wird. Ihr Verhältnis ist also a : b. Dividiert man beide Schwingungszahlen a und b durch a, so ist das Verhältnis dieser Töne $= 1 : \frac{b}{a}$, d. h. in derselben Zeit, in welcher der erste eine Schwingung macht, macht der zweite $\frac{b}{a}$. Wird $\frac{b}{a}$ in den kleinsten Zahlen $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ ausgedrückt, so heißt dieser Ausdruck $\frac{\beta}{\alpha}$ die relative Schwingungszahl des zweiten Tons in Bezug auf den ersten, welcher der Grundton genannt wird. Die relative Schwingungszahl irgend eines Tons in Bezug auf einen andern (Grundton) wird also bestimmt durch den in den kleinsten Zahlen ausgedrückten Quotienten der absoluten Schwingungszahlen dieser beiden Töne. Durch die relativen Schwingungszahlen wird die Höhe der Töne bestimmt.

Zwei Töne A und B sind an Höhe einander gleich, wenn der Exponent ihrer relativen Schwingungszahlen derselbe ist; der Ton A ist dagegen höher als B, wenn der Exponent der zu A gehörigen relativen Schwingungszahl größer ist, als der Exponent der relativen Schwingungszahl von B. Ist die relative Schwingungszahl eines Tons = 2, so heißt dieser bekanntlich die Oktave des Grundtons; hat er den Werth von $^3/_2$, so heißt er die Quinte u. s. w.

Die Differenz zweier Töne heißt ihr Intervall. Daß das Intervall zweier Töne nicht durch die Differenz ihrer zugehörigen Schwingungszahlen unmittelbar bestimmt werden kann, läßt sich leicht zeigen. Ist nämlich G der Grundton, A der erste abgeleitete Ton mit der relativen Schwingungszahl = 2, B der zweite abgeleitete Ton mit der relativen Schwingungszahl = 4, C der dritte = 8, so ist nach dem Vorigen A die Oktave von G, B die Oktave von A und C die Oktave von B; die Differenz der relativen Schwingungszahlen zwischen B und A = 2, zwischen C und B = 4. Sollten also diese Differenzen als die resp. Intervalle der angenommenen Töne anzusehen sein, so müßte unser Ohr das Intervall der zweiten Oktave zwischen B und C als ein doppelt so großes auffaßen wie das zwischen A und B, während nach der Erfahrung unser Ohr die Intervalle aller Oktaven als gleiche Intervalle empfindet und innerhalb des einen nicht mehr und nicht weniger Töne unterscheidet als innerhalb des andern. Die Maßbestimmung des Intervalls zweier beliebiger Töne mittelst ihrer relativen Schwingungszahlen muß also auf einem anderen Wege gefunden werden. Ist nämlich $\frac{\beta}{\alpha}$ die relative Schwingungszahl des Tons A in Bezug auf den Grundton G und wird auf diesen Ton A als neuen Grundton ein Ton B bezogen, der zu dem ersteren wiederum die relative Schwingungszahl $\frac{\beta}{\alpha}$ hat, so hat B offenbar denselben Abstand von A, wie A von G, also ein doppelt so großes Intervall von G wie A. Denn die relative Schwingungszahl von B war $= \frac{\beta}{\alpha} \cdot A = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\beta}{\alpha} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2$, während die von $A = \frac{\beta}{\alpha}$ war. Wird nun weiter ein Ton C bestimmt, der sich ebenso von B als Grundton ableitet, wie B von A, oder A von G, so ist

$C = \frac{\beta}{\alpha} \cdot B = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^3$ und hat also ein dreimal so großes Intervall von G wie A von G u. s. w. Die Intervalle werden nach dieser Betrachtungsweise offenbar durch die (ganzen) Exponenten der relativen Schwingungszahlen bestimmt. Wird nun $\frac{\beta}{\alpha}$ so bestimmt, daß sowohl der dieser relativen Schwingungszahl zugehörige Ton A als der mit $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2$ bezeichnete B dem Ohre vernehmbare Töne sind, so laßen sich zwischen diesen Tönen A und B noch unzählig viele andere Töne denken, die höher als A und tiefer als B liegen, und deren relative Schwingungszahlen wir allgemein mit $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^x$ bezeichnen können, insofern x eine Veränderliche ausdrückt zwischen den Grenzen 1 und 2. Ebendieselbe Betrachtung ergiebt sich für die oben angeführten Töne B und C und so fort. Gilt $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^v$ als der Repräsentant aller in der Musik möglichen Töne und wird v auf die Grenzen eingeschränkt, welche die Akustik lehrt, so läßt sich durch denselben jeder beliebige Ton mit der relativen Schwingungszahl $\frac{\gamma}{\delta}$ ausdrücken. Wird nämlich das Intervall des durch $\frac{\beta}{\alpha}$ bestimmten Tons vom Grundton als Maßeinheit angenommen, so wird das dem durch $\frac{\gamma}{\delta}$ bestimmten Ton zugehörige Intervall in Bezug auf dieselbe Maßeinheit bestimmt durch die Gleichung: $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^v = \frac{\gamma}{\delta}$, woraus $v = \dfrac{\log\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)}{\log\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}$. Das Intervall eines Tons vom Grundton wird also bestimmt durch den Quotienten aus dem Logarithmus der relativen Schwingungszahl eben dieses Tons dividiert durch den Logarithmus der relativen Schwingungszahl eines andern Tons, dessen Intervall vom Grundton als Maßeinheit genommen ist. Wird in dieser Formel $\frac{\beta}{\alpha} = 2$ gesetzt, also das Intervall der Oktave als Maßeinheit genommen, so wird $v = \dfrac{\log\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)}{\log 2}$. Diese wichtige, zuerst von Euler aufgefundene Formel weist einfach und klar den Zusammenhang zwischen den relativen Schwingungszahlen zweier Töne und ihres Intervalles nach und bietet ein leichtes Mittel dar, die Intervalle von Tönen zu vergleichen, sobald ihre relativen Schwingungszahlen festgestellt sind. Da die Logarithmen den Alten nicht bekannt waren, so mußten sie natürlich dieses Vortheils in der Berechnung der Intervalle entbehren und die mühsamere Rechnung mit Proportionen anwenden.

§. 2.

Nach der Ueberlieferung der Alten waren es die Pythagoreer, welche die relativen Schwingungszahlen der in der Musik gebräuchlichen Töne festgestellt haben. Nach Böckh's „Philolaos“, Berlin 1819, hatte die von ihnen bestimmte diatonische Tonleiter folgende Gestalt:

Quinte	c	νήτη	c	
	H^b	παρανήτη	H^b	8 : 9 Ton
	As	τρίτη	(Gis)	8 : 9 Ton
	G	παραμέση	G	243 : 256 Halbton
Quinte / Quarte	F	μέση	F	8 : 9 Ton
Quarte	Es	λιχανός	(Dis)	8 : 9 Ton
	Des	παρυπάτη	(Cis)	8 : 9 Ton
	C	ὑπάτη	C	243 : 256 Halbton.

Anmerkung. Daß die zur Linken von mir gegebene Bezeichnung der Töne richtiger ist als die zur Rechten beigefügte von Böckh, ergiebt sich aus dem Folgenden.

Außer diesen Tönen werden noch als kleinere Intervalle unterschieden pag. 79 die Apotome, deren Verhältnis ausgedrückt ist durch 2048 : 2187 und das Komma, das, in den kleinsten Zahlen ausgedrückt, das Verhältnis 524288 : 531441 giebt. Vertauschen wir in obiger Tabelle die Reihenfolge der Töne von oben nach unten, so wird sie in jetzt üblicher Folge, C als Grundton genommen, diese Gestalt annehmen:

$$\underbrace{C \quad D}_{9/8}\underbrace{\quad E}_{9/8}\underbrace{\quad F}_{256/243}\underbrace{\quad G}_{9/8}\underbrace{\quad A}_{9/8}\underbrace{\quad H}_{9/8}\underbrace{\quad c}_{256/243}$$

Der Apotome entspricht dann offenbar das Verhältnis zwischen einem Halbton und dem zugehörigen ganzen Ton, $\frac{256}{243} : {}^9/_8 = \frac{8 \cdot 256}{9 \cdot 243} = \frac{2048}{2187}$. Soll demnach in der chromatischen Tonleiter ein erhöheter oder erniedrigter Ton bestimmt werden, so multipliciert man die dem Tone zugehörige relative Schwingungszahl resp. mit $\frac{2048}{2187}$ oder $\frac{2187}{2048}$. Die relative Schwingungszahl für cis ist also $= \frac{2187}{2048}$, des $= {}^9/_8 \cdot \frac{2048}{2187} = \frac{256}{243}$. Das Verhältnis eines erhöheten Tons zu dem in der Skala darauf folgenden erniedrigten z. B. cis : des ist $= \frac{2187}{2048} : {}^9/_8 \cdot \frac{2048}{2187}$ $= 531441 : 524288$, eine Verhältniszahl, die dem obigen Komma entspricht.

Es kann die Frage aufgeworfen werden, wie dies Tonsystem entstanden ist, ob durch Meßung oder Rechnung. Da die Griechen nur die Quarte, Quinte und Oktave als mit dem Grundton harmonierend betrachtet haben, worauf auch schon die sogenannte harmonische Proportion aus den Zahlen 6, 4, 3 hinweis't, so liegt die Vermuthung nahe, daß, nachdem diese Intervalle durch unmittelbare Meßung gefunden waren, die übrigen Intervalle der Skala durch Rechnung bestimmt wurden. Und in der That möchte es schwer fallen, den Halbton, oder gar die erhöheten und erniedrigten Töne in der chromatischen Skala durch Meßung der Saitenlänge nach dem Gehör zu fixieren, während dies bei den angegebenen Intervallen weniger Schwierigkeit hat. Nehmen wir an, daß die Oktave durch Halbierung der Saite, die Quinte durch 2 Theile von 3 gleichen Theilen derselben gefunden war, so reichen diese beiden Intervalle zur Bestimmung der übrigen in der Skala vollkommen aus, wie folgendes Schema zeigt:

C D E F G A H c d e

Also C — G D — d d — D D — A 2c.

Man muß hierbei erst d, e bestimmen, durch deren untere Oktaven D, E gefunden werden. Wird die Quarte als die Ergänzung der Quinte zur Oktave bei der Bestimmung der Skala mit in Anwendung gebracht, so braucht man nicht einmal Töne zu benutzen, die über die Oktave hinausliegen, wie aus folgendem Schema hervorgeht:

C D E F G A H

C — G, G — D, (Unterquart)
D — A, A — E, 2c.

Die relativen Schwingungszahlen der Töne in der diatonischen Tonleiter ergeben sich einfach auf diese Weise. Ist $G = {}^3/_2$, $F = {}^4/_3$, $c = 2$, so ist $D = {}^3/_4\, G$ (als Unterquart von G) $= {}^9/_8$, $A = {}^3/_2\, D = {}^{27}/_{16}$, $E = {}^3/_4\, A = {}^{81}/_{64}$ und $H = {}^3/_2\, E = {}^{243}/_{128}$ die in folgender Tabelle zusammengestellt sind:

C	D	E	F	G	A	H	c
1	$^9/_8$	$^{81}/_{64}$	$^4/_3$	$^3/_2$	$^{27}/_{16}$	$^{243}/_{128}$	2

Bezeichnen wir allgemein die Quinte mit Q, also die Quarte mit $\frac{2}{Q}$, so würden für eine beliebige Quinte nach diesem Tonsystem die relativen Schwingungszahlen der einzelnen Töne in der diatonischen Skala in Bezug auf den Grundton $= 1$ folgende Werthe haben: $1, \frac{Q^2}{2}, \frac{Q^4}{4}, \frac{2}{Q}, Q, \frac{Q^3}{2}, \frac{Q^5}{4}, 2$. Die Intervalle zwischen den ganzen Tönen sind nach diesem System überall dieselben, ebenso zwischen einem Halbton und ganzen Ton, überhaupt 2 beliebige Intervalle, die gleichviele und der Art nach dieselben Töne umfaßen. Jedes Intervall, das z. B. 2 ganze Töne umfaßt, das wir jetzt in Bezug auf den Grundton die große Terz nennen, ist bestimmt durch die relative Schwingungszahl $\frac{Q^4}{4}$; dagegen ist das Intervall, das einen ganzen und einen Halbton umfaßt (die kleine Terz) durch die relative Schwingungszahl $\frac{4}{Q^3}$ zu bestimmen. Soll nun der dritte Ton in der diatonischen Skala erniedrigt werden, so hat man $\frac{Q^4}{4}$ mit $\frac{4}{Q^3}$ zu vertauschen, oder den Ton, der in diesem Falle durch die relative Schwingungszahl $\frac{Q^4}{4}$ bezeichnet ist, mit $\frac{16}{Q^7}$ zu multiplicieren; wäre umgekehrt ein Ton, der mit $\frac{4}{Q^3}$ bezeichnet ist, zu erhöhen gewesen, so hätte man diese relative Schwingungszahl mit $\frac{Q^7}{16}$ multiplicieren müßen. Da aber überall, wie vorhin bemerkt, zwei beliebige Intervalle, die gleichviele und der Art nach dieselben Töne umfaßen, einander gleich sind, man mag in der diatonischen Skala welchen Ton man will als Grundton annehmen, so wird jeder beliebige Ton einmal erhöht oder erniedrigt, wenn man ihn resp. mit $\frac{Q^7}{16}$ oder dessen reciprokem Werthe multipliciert. Wird also C als Grundton mit 1 bezeichnet, so ist die relative Schwingungszahl von $C\sharp = \frac{Q^7}{16}$, $D^b = \frac{Q^2}{2} \cdot \frac{16}{Q^7} = \frac{8}{Q^5}$, $D\sharp = \frac{Q^2}{2} \cdot \frac{Q^7}{16} = \frac{Q^9}{32}$, $E^b = \frac{Q^4}{4} \cdot \frac{16}{Q^7} = \frac{4}{Q^3}$:c. und damit also auch die chromatische Tonleiter nach diesem System vollständig bestimmt. Hiebei ist, wie man sich sofort aus dem Obigen überzeugt, das Verhältnis zweier auf einander folgenden erhöheten oder erniedrigten Töne immer noch dasselbe wie das zugehörige der entsprechenden Töne in der diatonischen Skala. Wie derselbe Weg weiter verfolgt werden kann, wenn Töne doppelt erhöhet oder erniedrigt werden sollen, liegt auf der Hand und braucht hier nicht weiter ausgeführt zu werden. In Bezug auf die Berechnung der Intervalle dieses Systems nach der Euler'schen Formel und das Verhältnis desselben zum neueren System verweise ich auf den zweiten Abschnitt.

Andere Untersuchungen wie z. B. die über die Tongeschlechter der alten Griechen können hier nicht weiter verfolgt werden; wir wenden uns jetzt zur Betrachtung des jetzt üblichen Tonsystems.

§. 3.

Die diatonische Skala der neueren Musik unterscheidet sich einmal schon durch die Reihenfolge der Töne, wie im vorigen Paragraph angegeben; ein noch bedeutenterer Unterschied, wenigstens in der Theorie, tritt dadurch hervor, daß der dritte ganze und dritte Halbton (die große und kleine Terz) eine neue Bestimmung erhält (wahrscheinlich im XVI s. durch den Venetianer Zarlino, cf. Allgem. Monatsschrift, Juni 1853), indem man jetzt nämlich das Verhältnis des Grundtons zur großen Terz $= 4:5$, des Grundtons zur kleinen Terz $= 5:6$ annimmt und beide als Consonanzen betrachtet. Durch diese Aenderung werden dann auch andere Töne in der Skala modificiert und es bleiben nur die relativen Schwingungszahlen der Oktave, Quinte, Quarte und Sekunde mit den im vorigen Paragraph angegebenen in Uebereinstimmung. Die jetzige diatonische Skala hat bekanntlich folgende Gestalt:

$$\underbrace{C \quad D}_{9/8}\underbrace{\quad E}_{10/9}\underbrace{\quad F}_{16/15}\underbrace{\quad G}_{9/8}\underbrace{\quad A}_{10/9}\underbrace{\quad H}_{9/8}\underbrace{\quad c}_{16/15}$$

C	D	E	F	G	A	H	c
1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2.

Bezeichnen wir allgemein die relative Schwingungszahl der großen Terz mit T', die der kleinen mit T'', so ist nach diesem Tonsystem $T' \cdot T'' = Q$, also $T'' = \frac{Q}{T'}$. Danach nimmt die vorhin angegebene Skala im Allgemeinen diese Form an:

$$\underbrace{C \quad D}_{\frac{Q^2}{2}}\underbrace{\quad E}_{\frac{2 \cdot T'}{Q^2}}\underbrace{\quad F}_{\frac{2}{QT'^2}}\underbrace{\quad G}_{\frac{Q^2}{2}}\underbrace{\quad A}_{\frac{2 \cdot T'}{Q^2}}\underbrace{\quad H}_{\frac{Q^2}{2}}\underbrace{\quad c}_{\frac{2}{T'^2Q}}$$

also sind die relativen Schwingungszahlen in Bezug auf den Grundton allgemein:

C	D	E	F	G	A	H	c
1	$\frac{Q^2}{2}$	T'	$\frac{2}{Q}$	Q	$\frac{2T'}{Q}$	QT'	2.

Die erhöheten und erniedrigten Töne werden ebenso wie im §. 2. abgeleitet: die ersteren, indem man den ursprünglichen Ton mit $\frac{T'}{T''}$; die anderen, indem man denselben mit $\frac{T''}{T'}$ multipliciert, wie folgende Tabelle zeigt:

$$C\sharp = \frac{T'}{T''} = \frac{T'^2}{Q}$$
$$D\sharp = \frac{Q^2}{2} \cdot \frac{T'^2}{Q} = \frac{QT'^2}{2}$$
$$E\sharp = T' \cdot \frac{T'^2}{Q} = \frac{T'^3}{Q}$$
$$F\sharp = \frac{2}{Q} \cdot \frac{T'^2}{Q} = \frac{2 \cdot T'^2}{Q^2}$$
$$G\sharp = Q \cdot \frac{T'^2}{Q} = T'^2$$
$$A\sharp = \frac{2 \cdot T'}{Q} \cdot \frac{T'^2}{Q} = \frac{2 \cdot T'^3}{Q^2}$$
$$H\sharp = QT' \cdot \frac{T'^2}{Q} = T'^3$$

$$C^b = \frac{T''}{T'} = \frac{Q}{T'^2}$$
$$D^b = \frac{Q^2}{2} \cdot \frac{Q}{T'^2} = \frac{Q^3}{2 \cdot T'^2}$$
$$E^b = \frac{Q}{T'}$$
$$F^b = \frac{2}{Q} \cdot \frac{Q}{T'^2} = \frac{2}{T'^2}$$
$$G^b = Q \cdot \frac{Q}{T'^2} = \frac{Q^2}{T'^2}$$
$$A^b = \frac{2 \cdot T'}{Q} \cdot \frac{Q}{T'^2} = \frac{2}{T'}$$
$$H^b = QT' \cdot \frac{Q}{T'^2} = \frac{Q^2}{T'}$$

Die doppelt erhöheten und erniedrigten Töne werden ebenso aus den einfach erhöheten und erniedrigten abgeleitet, wie die letzteren aus den ursprünglichen Tönen der diatonischen Skala, z. B.: $C\sharp\sharp = \frac{T'^4}{Q^2}$, $C^{bb} = \frac{Q^2}{T'^4}$ rc.

Aus dieser Ableitung ergiebt sich sofort, daß die Intervalle zwischen zwei beliebigen, in gleicher Weise erhöheten und erniedrigten Tönen immer dieselben bleiben wie zwischen den zugehörigen Tönen in der diatonischen Skala, z. B.: $D : G = D\sharp : G\sharp = D^b : G^b$ u. s. w. Deshalb möchte ich es nicht billigen, wenn der Prof. Drobisch bei der Bestimmung der kleinen Sekunde D^b und der kleinen Septime H^b, sowie der übermäßigen Sekunde $D\sharp$ abweichend von den Angaben der phys. Lehrbücher diese überall mit $\frac{2}{QT'}$, $\frac{2^2}{Q^2}$, $\frac{2 \cdot T'^3}{Q^3}$ anstatt mit $\frac{Q^3}{2 \cdot T'^2}$, $\frac{Q^2}{T'}$ und $\frac{QT'^2}{2}$ bezeichnet. Denn wenn auch diese Bestimmung der relativen Schwingungszahlen dieselbe Berechtigung haben mag wie die übliche, so möchte ich mich doch deshalb dagegen entscheiden, weil hiedurch die oben angegebene Uebereinstimmung der Intervalle zwischen je 2 erhöheten und erniedrigten und den zugehörigen ursprünglichen Tönen unterbrochen werden würde. Der Prof. Drobisch nennt das jetzt übliche Intervall der kleinen Sekunde (p. 17) das große Limma, das der kleinen Septime die kleinere kleine Septime und das der übermäßigen Sekunde die kleine übermäßige Sekunde und hat somit in der Skala zu der Sekunde (nebst der erhöheten und erniedrigten) Töne gewonnen, die sich einander vollständig zur Oktave ergänzen, während dieses in der jetzt üblichen Skala nicht der Fall ist, wie sich aus folgender Zusammenstellung ergiebt:

$$C \cdot c = 2$$
$$D \cdot ? = 2$$
$$E \cdot A^b = T \cdot \frac{2}{T} = 2$$
$$F \cdot G = \frac{2}{Q} \cdot Q = 2$$
$$G \cdot F = 2$$
$$A \cdot E^b = \frac{2T'}{Q} \cdot \frac{Q}{T'} = 2$$
$$H \cdot ? = 2$$
$$c \cdot C = 2$$

Aus dieser Zusammenstellung ersieht man, daß sowohl die große Sekunde wie die große Septime nach der jetzt üblichen Bestimmung keine in der Musik gebräuchliche Ergänzungstöne hat. Soll es nun einmal erlaubt sein, in der Bestimmung eines Tons von der gewöhnlichen Bestimmung in der üblichen Skala abzuweichen, so möchte ich lieber die Sekunde mit der relativen Schwingungszahl $\frac{2 \cdot T'}{Q^2}$ bezeichnen, indem ich durch diese eine Abänderung gerade dieselben Vortheile erreiche wie der Prof. Drobisch durch die angedeuteten Modifications der Skala. In diesem Falle würde die Lücke in der obigen Zusammenstellung sich ausfüllen und dem D ein H^b, sowie dem H ein D^b als Ergänzungston zur Oktave entsprechen. Die vorgeschlagene Abänderung in der Bestimmung der großen Sekunde durch $\frac{2T'}{Q^2}$, die am Ende nicht gewagter sein möchte als die der kleinen Sekunde und Septime und der übermäßigen Sekunde, empfiehlt sich außerdem durch folgende Betrachtung.

Ein Vorzug, dessen Bedeutsamkeit aus dem folgenden Abschnitt noch weiter hervorgehen wird, in der nach den Principien der Pythagoreer construierten Skala bestand darin, daß die gleichnamigen Intervalle zwischen 2 beliebigen Tönen der Skala immer einander gleich waren. Dies war offenbar eine Folge davon, daß zur Bestimmung der Töne in der Skala außer der Oktave nur noch die Quinte oder Quarte benutzt zu werden brauchte. Dieses Vorzugs entbehrt aber die neuere Skala, sobald nicht $T' = \frac{Q^4}{4}$ angenommen wird, indem sowohl die Intervalle zwischen 2 ganzen Tönen, als zwischen 3 u. s. w. nicht unerhebliche Differenzen darbieten. Und in der That kann dies auch nicht anders sein, da die Töne in der Skala bald allein durch Terzen oder Quinten, bald durch Verbindung von beiden abgeleitet sind. Bestimmt man nun die große Sekunde durch $\frac{2T'}{Q^2}$, so sind wenigstens innerhalb einer Oktave alle großen und kleinen Terzen einander gleich, man mag ausgehen von welchem Ton als Grundton man will. cf. die folgende Skala:

C	D	E	F	G	A	H	c
1	$\frac{2T'}{Q^2}$	T'	$\frac{2}{Q}$	Q	$\frac{2T'}{Q}$	$T'Q$	2

die sich auch so bezeichnen läßt:

I.	C	D	E	F	G	A	H	c
	1	$\frac{2}{T'T''^2}$	T'	$\frac{2}{T'T''}$	$T'T''$	$\frac{2}{T''}$	T'^2T''	2

Wählen wir in der üblichen Skala dieselbe Bezeichnung, so erhält sie folgende Gestalt:

II.	C	D	E	F	G	A	H	c
	1	$\frac{T'^2T''^2}{2}$	T'	$\frac{2}{T'T''}$	$T'T''$	$\frac{2}{T'}$	T'^2T''	2

Die Vergleichung dieser beiden Skalen zeigt, daß in No. I. das Intervall D — F dasselbe ist wie A — C, was in No. II. nicht der Fall ist; außerdem hat sie noch den Vorzug, daß das Intervall von D — A gleich der Quinte ist, was ebenfalls in No. II. nicht der Fall ist. Dies sind die Gründe, warum ich auch in Folgendem von der üblichen Bestimmung der Sekunde abgewichen bin; allein auch wenn diese Abänderung gebilligt werden sollte, so reicht sie doch noch lange nicht aus, allen den Uebelständen abzuhelfen, zu deren Beseitigung die sogenannte Temperatur angewendet wird.

II. Abschnitt.

Ueber die Temperatur in der neueren Musik.

§. 4.

Schon im vorigen §. wurde bei der Betrachtung der Skala der neueren Musik darauf hingewiesen, daß die Intervalle zwischen 2 oder mehreren beliebigen Tönen derselben nicht immer dieselbe Größe haben mit den entsprechenden Intervallen, die vom Grundton aus genommen werden. Diese Wahrnehmung giebt schon einen Fingerzeig, daß Terzen, Quinten, Quarten und andere Intervalle nicht mehr überall dieselben bleiben werden, sobald man außer dem angenommenen Grundton in der Skala von irgend einem andern Ton als Grundton ausgehen will. Um diese Unterschiede beßer zu übersehen, diene folgende Tabelle, die sich leicht aus der Skala mit einfach erhöheten und erniedrigten Tönen mit Anwendung der oben angegebenen Eulerschen Formel berechnen läßt.

	rel. Schwzhl.	Intervall
C	1 = 1,000	0,000
C♯	$^{25}/_{24}$ = 1,042	0,059
D♭	$^{16}/_{15}$ = 1,067	0,093
D	$^{10}/_{9}$ = 1,111	0,152
D♯	$^{125}/_{108}$ = 1,157	0,211
E♭	$^{6}/_{5}$ = 1,200	0,263
E	$^{5}/_{4}$ = 1,250	0,322
F♭	$^{32}/_{25}$ = 1,280	0,356
F	$^{4}/_{3}$ = 1,333	0,415
F♯	$^{25}/_{16}$ = 1,389	0,474

	rel. Schwzhl.	Intervall
c	2 = 2,000	1,000
c♭	$^{48}/_{25}$ = 1,920	0,941
H	$^{15}/_{8}$ = 1,875	0,907
H♭	$^{9}/_{5}$ = 1,800	0,848
A♯	$^{125}/_{72}$ = 1,736	0,796
A	$^{5}/_{3}$ = 1,667	0,737
A♭	$^{8}/_{5}$ = 1,600	0,678
G♯	$^{25}/_{16}$ = 1,562	0,644
G	$^{3}/_{2}$ = 1,500	0,585
G♭	$^{36}/_{25}$ = 1,440	0,526

Ableitung anderer Tonarten.

Wie aus dieser Tabelle die üblichen Dur- und Molltonarten abgeleitet werden, ist leicht zu ersehen. Es wird genügen, einige von diesen herauszuheben und in den Durtonarten die Intervalle, große Sekunde, große Terz, Quarte, Quinte, große Sexte, große Septime; in den Molltonarten: große Sekunde, kleine Terz, Quarte, Quinte, kleine Sexte, kleine Septime anzugeben, um die angedeuteten Abweichungen zu erkennen. Eine vollständigere Uebersicht giebt Prof. Drobisch p. 47, der, wie in der folgenden Tabelle geschehen, das Intervall der Oktave = 1000 setzt.

I. Dur.

Grundton	gr. Sek.	gr. Terz.	Quarte	Quinte	gr. Sext.	gr. Sept.
C	152	322	415	585	737	907
G	152	322	415	567	737	889
D	170	322	433	585	755	907
A	170	322	415	585	737	907
E	152	322	415	585	737	889
H	152	304	415	567	737	889
C♯	152	322	415	585	737	907

II. Moll.

Grundton	gr. Sek.	kl. Terz.	Quarte	Quinte	kl. Sext.	kl. Sept.
A	170	263	415	585	678	848
E	152	263	415	585	678	830
H	152	245	415	567	678	830
F♯	170	263	433	585	678	848
C♯	152	263	415	585	678	848
G♯	152	263	415	567	678	830
D♯	170	263	433	585	696	848
C	152	263	415	585	678	848

In dieser Tabelle ist das Intervall der großen Sekunde = 0,152 gesetzt aus den oben angegebenen Gründen; daher einzelne Abweichungen von der vom Prof. Drobisch gegebenen. Bei dieser Annahme erhalte ich 4 Tonarten, die mit Ausnahme der großen Sekunde mit den Intervallen der üblichen Skala ganz genau übereinstimmen, nämlich C- und Cis-dur, sowie C- und Cis-moll, während der Prof. Drobisch bei seiner Annahme deren nur 2 erhält, nämlich C-dur und C-moll. Man sieht aber sogleich, daß auch bei dieser Annahme eine irgendwie genügende Uebereinstimmung der gleichen Intervalle in den übrigen Tonarten nicht erreicht wird. Die Abweichungen in den übrigen Tonarten betragen bei den einzelnen Intervallen meist c · $^1/_9$ ganzer Ton (zu 0,170 gerechnet), sind aber so unregelmäßig vertheilt, daß schon deshalb dieselben in der praktischen Musik unerträglich sein würden. Daher wird man leicht der Behauptung des Prof. Drobisch beipflichten, wenn er sagt p. 49, daß die akustischen Bestimmungen außer in C-dur und C-moll (cf. dagegen oben) keine einzige ganz befriedigende Skala geben, daher musikalisch unbrauchbar sind. Sollen sie also musikalisch brauchbar werden, so müßen sie geändert, oder wie man sagt temperiert werden. Mit dieser Modification der Intervalle beschäftigt sich die sogenannte Temperatur, welche es zur Aufgabe hat, eine solche Skala zu bilden, daß in allen Tonarten eine genäherte Reinheit der Intervalle möglich wird. Ist die genäherte Reinheit der Intervalle in allen Tonarten mit den entsprechenden der ursprünglichen Skala immer dieselbe, so heißt eine solche Temperatur eine gleichschwebende; ist dieselbe in einigen Tonarten genauer als in anderen, so heißt sie eine ungleichschwebende. Da die letztere weniger wißenschaftlichen Werth hat und da sie, wie Drobisch p. 53 bemerkt, den innern Zusammenhang der Intervalle großentheils zerreißt, so wenden wir uns sogleich zur gleichschwebenden Temperatur.

§. 5.

Bei der gleichschwebenden Temperatur sollen alle gleichgroßen Intervalle in allen Tonarten denselben Werth haben, folglich brauchen wir nur auf die in §. 2 nach dem System der Pythagoreer gebildete Skala zurückzugehen, da ja diese die obige Forderung erfüllt. Werden in der diatonischen Skala

C	D	E	F	G	A	H	c
1	$\frac{Q^2}{2}$	$\frac{Q^4}{4}$	$\frac{2}{Q}$	Q	$\frac{Q^3}{2}$	$\frac{Q^5}{4}$	2

die den relativen Schwingungszahlen zugehörigen Intervalle nach der Eulerschen Formel bestimmt und wird dabei nach dem Vorgange des Prof. Drobisch $\frac{\log Q}{\log 2}$ kurzweg mit q bezeichnet, so nehmen die den angegebenen Tönen zugehörigen Intervalle folgende Gestalt an:

C	D	E	F	G	A	H	c
0	$2q-1$	$4q-2$	$1-q$	q	$3q-1$	$5q-2$	1

Die jetzt übliche Skala hat folgende Intervalle, wenn man t' für $\frac{\log T'}{\log 2}$ setzt:

C	D	E	F	G	A	H	c
0	$2q-1$	t'	$1-q$	q	$1-q+t'$	$q+t'$	1

Soll die letztere mit der ersten übereinstimmen, so muß $t' = 4q - 2$ sein. Dasselbe Resultat folgt, wenn die Intervalle der Mollskala bestimmt werden. Da der Gleichung $t' = 4q - 2$ unzählig viele Auflösungen entsprechen, insofern q und t' als Unbekannte betrachtet werden, so kann man auch unzählig viele Temperaturen aufstellen, und es ist weiter die Aufgabe, unter denselben eine Auswahl von solchen zu treffen, welche Intervalle in größtmöglicher Uebereinstimmung mit denen der üblichen Skala darbieten; und gerade in dieser Beziehung ist die Schrift vom Prof. Drobisch reich an Temperaturen, welche die bisher aufgestellten an Vollkommenheit bei weitem übertreffen.

Noch in der Theorie der Musik von Opelt ist, soviel ich aus der Allg. Monatsschrift ersehe, nur von 12- und 19stufigen die Rede, während Drobisch noch 6 andere vollständig berechnet und in Bezug auf ihre Güte aufs genaueste geprüft hat. Was die 12stufige oder, wie Drobisch sie nennt, die gewöhnliche Temperatur betrifft, die bei den jetzigen Tasteninstrumenten angewendet werden muß, so will ich ihre Berechnung, die ganz einfach ist, im Folgenden wiedergeben.

Da auf unsern Tasteninstrumenten zwei auf einander folgende ganze Töne, von denen der erste erhöht und der zweite erniedrigt ist, zusammenfallen, also $C\sharp = D^b$, $F\sharp = G^b$ u. s. w., so brauchen wir nur die Intervalle von zwei solchen Tönen einander gleich zu setzen, um daraus das temperierte q zu bestimmen. Die relative Schwingungszahl von C♯ ist $= \frac{T'^2}{Q}$, von $D^b = \frac{Q^3}{2T'^2}$, die Bedingungsgleichung war $T' = \frac{Q^4}{4}$; wird nun $C\sharp = \frac{Q^7}{16}$ und $D^b = \frac{8}{Q^5}$, also $Q^7 = \frac{128}{Q^5}$, so ist $Q^{12} = 128 = 2^7$; $12 \cdot \log Q = 7 \cdot \log 2$, $12 \cdot \frac{\log Q}{\log 2} = 12 \cdot q = 7$, folglich $q = {}^7/_{12}$. Da das Intervall der Oktave $= 1$ ist, so ergeben sich die übrigen Intervalle der Skala nach dieser Temperatur bis auf 5 Decimalen folgendermaßen:

	Intervalle		Intervalle
C	$0{,}00000$	G	${}^7/_{12} = 0{,}58333$
C♯ (D^b)	${}^1/_{12} = 0{,}08333$	G♯ (A^b)	${}^8/_{12} = 0{,}66667$
D	${}^2/_{12} = 0{,}16667$	A	${}^9/_{12} = 0{,}75000$
D♯ (E^b)	${}^3/_{12} = 0{,}25000$	A♯ (H^b)	${}^{10}/_{12} = 0{,}83333$
E (F^b)	${}^4/_{12} = 0{,}33333$	H (c^b)	${}^{11}/_{12} = 0{,}91667$
F (E♯)	${}^5/_{12} = 0{,}41667$	(H♯) c	$1 = 1{,}00000$
F♯ (G^b)	${}^6/_{12} = 0{,}50000$		

Bei dieser Temperatur geben 12 Quinten gerade 7 Oktaven, es trifft also ein Vielfaches der Quinte mit einem Vielfachen der Oktave zusammen. Bekanntlich wird überhaupt ein jedes Vielfache von Quinten, dem ein anderes Vielfaches von Oktaven genau entspricht, ein Quintenzirkel genannt. Daß ein solcher Quintenzirkel nur bei temperirten Quinten möglich ist, zeigt sofort die Gleichung $(^3/_2)^x = 2^y$, in der sich x und y nicht durch ganze Zahlen ausdrücken laßen. Nimmt man für q als reine Quinte das Intervall 0,5849625, so ist das Zwölffache $= 7{,}01955$, und übertrifft also das Intervall von 7 Oktaven um 0,01955: ein Intervall, das dem Pythagoreischen Komma (cf. s) $^{531441}/_{524288}$ entspricht. Was die Güte dieser Temperatur betrifft, so könnte sie als vollkommen genügend betrachtet werden, wenn man ihre Anwendung auf Tasteninstrumente beschränken wollte. Aber auf den Streichinstrumenten und im Gesange werden die erhöheten und erniedrigten Töne praktisch unterschieden, und darum kann sie auf keine allgemeine Anwendung in der Musik Anspruch machen. Daraus erhellt die Nothwendigkeit andere Temperaturen aufzustellen, und es fragt sich jetzt, auf welchem Wege man dabei die meiste Aussicht auf günstige Resultate hat. Prof. Drobisch betritt zuerst den von Euler angebahnten Weg, indem er das reine Quintenintervall 0,5849625 in einen Kettenbruch verwandelt und von den Näherungsbrüchen den vierten und fünften, nämlich $^{24}/_{41}$ und $^{31}/_{53}$ auswählt. Ehe er aber zur Anwendung dieser temperierten Quinten schreitet, betritt er zugleich einen zweiten Weg, indem er eine Tafel von Vielfachen (13—53fache) des reinen Quintenintervalls construiert und aus dieser Tafel diejenigen Vielfachen von q heraushebt, die bis auf weniger als 0,2 einem Vielfachen des Oktavenintervalls gleichkommen; dann aber wieder eine neue Auswahl von solchen temperierten Quinten trifft, die kleiner als q sind, und somit 3 neue temperierte Quinten gewinnt, nämlich $^{11}/_{19}$, $^{18}/_{31}$, $^{25}/_{43}$. Nachdem der Prof. Drobisch diese 3 zuletzt genannten Systeme beleuchtet hat, wirft er die Frage auf, ob es nicht ein System gebe, welches in Bezug auf die Intervalle der skalenbildenden Töne (als welche die große Sekunde, große Terz, Quinte, große Sexte und große Septime angegeben werden) sich der Reinheit mehr nähere als jedes andere und erledigt diese Frage mit Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate, indem er das Quintenintervall q so bestimmt, daß die Summe der Quadrate der Differenzen zwischen den allgemeinen, von q abhängigen Ausdrücken der temperierten Intervalle der vorhin angegebenen fünf Töne mit den entsprechenden Intervallen der üblichen Skala ein Minimum wird. Das nach dieser Rechnung gefundene temperierte Quintenintervall hat den Werth 0,5810541, dessen Näherungswerth in zweiziffrigen Zahlen am schärfsten ausgedrückt ist durch $^{43}/_{74}$. Daß nun dieses System, wenigstens in Bezug auf die ganzen und die davon abhängigen erniedrigten Töne die vollkommenste Skala darbietet, ist keine Frage und wird vom Verfaßer p. 78 des weiteren begründet. Es könnte aber auch die, wie ich glaube, nicht müßige Frage nach anderen temperierten Systemen aufgeworfen werden, die in Bezug auf eine geringere Anzahl von Tönen sich der Reinheit mehr nähern als jedes andere, insofern zu dieser Beschränkung ein ausreichender Grund vorhanden wäre. Und ein solcher Grund ist in der That vorhanden, wenn man die den Dur- und Mollakkord bildenden Töne in der Skala als die wichtigsten betrachtet. Von diesem Gesichtspunkte aus soll jetzt die Aufgabe gelöst werden, ein System aufzustellen, welches die den Dur- und Mollakkord zugleich bestimmenden Töne in möglichst scharfer Reinheit darbietet.

Die Rechnung für die Bestimmung dieses Systems ist im Folgenden auf doppelte Weise ausgeführt worden, indem 1) das temperierte Quintenintervall nach der vom Prof. Drobisch angedeuteten Rechnung, 2) das Terzenintervall nach der von mir in §. 3 angeführten Skala bestimmt wird. Letzteres Resultat kann dann zugleich als Controle des ersteren dienen:

1) Bezeichnet x die gesuchte temperierte Quinte, also $4x - 2$ die Terz, $3x - 1$ die große Sexte, g, e und a die zugehörigen Werthe in der üblichen Skala, so ist die Summe der Quadrate der Differenzen $(e - 4x + 2)^2 + (g - x)^2 + (a + 1 - 3x)^2 = 16x^2 - 8(e + 2)x + (e + 2)^2 + x^2 - 2gx + g^2 + 9x^2 - 6(a + 1)x + (a + 1)^2$. Dieser Ausdruck, in Bezug auf x differenziiert, giebt $32xdx - 8edx - 16dx + 2xdx - 2gdx + 18xdx - 6adx - 6dx = 0$, durch 2dx dividiert, $26x = 4e + g + 3a + 11$, also $x = \frac{4e + g + 3a + 11}{26}$; wird hierin $e = \frac{\log(^5/_4)}{\log 2}$, $g = \frac{\log(^3/_2)}{\log 2}$, $a = \frac{\log(^5/_3)}{\log 2}$ substituiert, so folgt $x = \frac{\log\left[(^5/_4)^4 \cdot (^3/_2) \cdot (^5/_3)^3 \cdot 2^{11}\right]}{26 \cdot \log 2} = \frac{\log\left(\frac{2^2 \cdot 5^7}{3^2}\right)}{26 \cdot \log 2}$. Die Rechnung mit zwölfstelligen Logarithmen giebt $x = 0{,}5801377$ oder bis auf 6 Stellen 0,580138.

2) Wird die Rechnung für die temperierte t′ in analoger Weise mit $(e - y)^2 + (g - {}^1/_2 - {}^1/_4 y)^2$

$+ (e^b - \frac{1}{2} + \frac{3}{4}y)^2$ ausgeführt, so folgt $y = \frac{16e + 4g - 12e^b + 4}{26} = 2 \cdot \log \left(\frac{5^7}{2^{11} \cdot 3^2}\right) : 13 \cdot \log 2$ (mit siebenstelligen Logarithmen berechnet) $= 0{,}320546$, wozu die temperierte Quinte $= 0{,}580137$ gehört: ein Resultat, das mit dem vorigen bis auf die sechste Decimale übereinstimmt. Die Näherungsbrüche in zweistelligen Zahlen sind $^{11}/_{19}$, $^{18}/_{31}$, $^{29}/_{50}$, dann folgt $^{76}/_{131}$. Aus diesen Werthen von q ersieht man, daß dies System dem vom Prof. Drobisch p. 72 und 73 behandelten sehr nahe liegt, indem sich in zweistelligen Zahlen außer $^{18}/_{31}$ nur noch $^{29}/_{50}$ aufstellen läßt, die einen genaueren Werth von der temperierten Quinte dieses Systems angiebt. Dies ist dasselbe Tonsystem, dessen auch Drobisch p. 75 in der Anmerkung erwähnt, wo er dasselbe, ohne es weiter auszuführen, damit charakterisiert, daß es zwischen den Systemen $q = {}^{11}/_{19}$ und $= {}^{18}/_{31}$ in der Mitte liegt. Die vorige Betrachtung wird gezeigt haben, daß es noch eine wichtigere Bedeutung hat und wohl verdient neben diesen Systemen mit hervorgehoben zu werden. Die Ausführung desselben ist in folgender Tabelle gegeben, in der neben den genäherten Werthen der Intervalle ihre schärferen beigefügt sind:

C	$= 0$	$= 0{,}00000$	c	$= 1$	$= 1{,}00000$
$(H^{\sharp\sharp})$	$= {}^{1}/_{50}$	$= 0{,}02262$	(d^{3b})	$= {}^{49}/_{50}$	$= 0{,}97738$
D^{bb}	$= {}^{2}/_{50}$	$= 0{,}03834$	$H^{\sharp}$	$= {}^{48}/_{50}$	$= 0{,}96166$
$C^{\sharp}$	$= {}^{3}/_{50}$	$= 0{,}06096$	c^{b}	$= {}^{47}/_{50}$	$= 0{,}93904$
$(H^{3\sharp})$	$= {}^{4}/_{50}$	$= 0{,}08359$	(d^{3b})	$= {}^{46}/_{50}$	$= 0{,}91641$
D^{b}	$= {}^{5}/_{50}$	$= 0{,}09932$	H	$= {}^{45}/_{50}$	$= 0{,}90068$
$C^{\sharp\sharp}$	$= {}^{6}/_{50}$	$= 0{,}12193$	c^{bb}	$= {}^{44}/_{50}$	$= 0{,}87807$
(E^{3b})	$= {}^{7}/_{50}$	$= 0{,}13765$	$A^{\sharp\sharp}$	$= {}^{43}/_{50}$	$= 0{,}86235$
D	$= {}^{8}/_{50}$	$= 0{,}16028$	H^{b}	$= {}^{42}/_{50}$	$= 0{,}83972$
$(C^{3\sharp})$	$= {}^{9}/_{50}$	$= 0{,}18290$	(c^{3b})	$= {}^{41}/_{50}$	$= 0{,}81610$
E^{bb}	$= {}^{10}/_{50}$	$= 0{,}19862$	$A^{\sharp}$	$= {}^{40}/_{50}$	$= 0{,}80138$
$D^{\sharp}$	$= {}^{11}/_{50}$	$= 0{,}22124$	H^{bb}	$= {}^{39}/_{50}$	$= 0{,}77876$
(F^{3b})	$= {}^{12}/_{50}$	$= 0{,}23696$	(G^{3b})	$= {}^{38}/_{50}$	$= 0{,}76304$
E^{b}	$= {}^{13}/_{50}$	$= 0{,}25959$	A	$= {}^{37}/_{50}$	$= 0{,}74041$
$D^{\sharp\sharp}$	$= {}^{14}/_{50}$	$= 0{,}28220$	(H^{3b})	$= {}^{36}/_{50}$	$= 0{,}71780$
F^{bb}	$= {}^{15}/_{50}$	$= 0{,}29794$	$G^{\sharp\sharp}$	$= {}^{35}/_{50}$	$= 0{,}70206$
E	$= {}^{16}/_{50}$	$= 0{,}32055$	A^{b}	$= {}^{34}/_{50}$	$= 0{,}67945$
$(D^{3\sharp})$	$= {}^{17}/_{50}$	$= 0{,}34317$	(H^{4b})	$= {}^{33}/_{50}$	$= 0{,}65683$
F^{b}	$= {}^{18}/_{50}$	$= 0{,}35890$	$G^{\sharp}$	$= {}^{32}/_{50}$	$= 0{,}64110$
$E^{\sharp}$	$= {}^{19}/_{50}$	$= 0{,}38151$	A^{bb}	$= {}^{31}/_{50}$	$= 0{,}61849$
(G^{3b})	$= {}^{20}/_{50}$	$= 0{,}39724$	$(F^{3\sharp})$	$= {}^{30}/_{50}$	$= 0{,}60276$
F	$= {}^{21}/_{50}$	$= 0{,}41986$	G	$= {}^{29}/_{50}$	$= 0{,}58014$
$E^{\sharp\sharp}$	$= {}^{22}/_{50}$	$= 0{,}44247$	(A^{3b})	$= {}^{28}/_{50}$	$= 0{,}55753$
G^{bb}	$= {}^{23}/_{50}$	$= 0{,}45822$	$F^{\sharp\sharp}$	$= {}^{27}/_{50}$	$= 0{,}54178$
$F^{\sharp}$	$= {}^{24}/_{50}$	$= 0{,}48082$	G^{b}	$= {}^{26}/_{50}$	$= 0{,}51918$
$(E^{3\sharp})$	$= {}^{25}/_{50}$	$= 0{,}50345$	(A^{4b})	$= {}^{25}/_{50}$	$= 0{,}49655$

Anmerkung. Die in der praktischen Musik nicht gebräuchlichen Töne sind in obiger Tabelle mit Klammern versehen und nur der Vollständigkeit wegen mit aufgeführt worden.

Daß dieses System an Reinheit der Intervalle der den Dur- und Mollakkord bestimmenden Töne alle übrigen übertreffen muß, folgt aus der vorhergehenden Rechnung. Vergleichen wir damit die drei von Drobisch für $q = {}^{18}/_{31} = {}^{25}/_{43} = {}^{43}/_{74}$ behandelten Systeme, so finden wir als Summe der Quadrate der Abweichungen bei den Intervallen der angegebenen Töne für

$^{18}/_{31}$	0,0000436
$^{25}/_{43}$	0,0000905
$^{43}/_{74}$	0,0000588
$^{29}/_{50}$	0,0000370.

In Bezug auf die zunehmende Uebereinstimmung der beiden Terzen mit denen des üblichen Systems ordnen sich diese Systeme nach den Resultaten dieser Rechnung folgendermaßen: $q = {}^{25}/_{43} = {}^{43}/_{74} = {}^{18}/_{31} = {}^{29}/_{50}$. Das System $^{18}/_{31}$ übertrifft also in dieser Beziehung an Reinheit die beiden anderen $^{25}/_{43}$ und $^{43}/_{74}$ und steht dem System $^{29}/_{50}$ sehr nahe.

In §. 2 hatte ich vorgeschlagen, die relative Schwingungszahl $^9/_8$ der großen Sekunde in der Skala mit $^{10}/_9$ zu vertauschen, ein Vorschlag, auf dessen Annahme ich allerdings wenig Gewicht lege, da auch hierdurch, wie schon bemerkt, keineswegs die Uebelstände alle beseitigt werden. Behalten wir diese Annahme einmal bei und berechnen wie vorhin das Intervall der temperierten Quinte, indem wir wie der Prof. Drobisch d, e, g, a, h als die skalenbildenden Töne betrachten, so ergiebt die Rechnung $q = \log \frac{({}^2{}_3 \cdot 5^{14})}{55 \cdot \log 2} = 0{,}580404$. Dieses temperierte System kommt dem vorigen ziemlich nahe, giebt aber das Intervall der großen Terz $= 0{,}321616$ fast ganz rein. Die vom Prof. Drobisch ausgeführten temperierten Systeme $q = {}^{18}/_{31}, {}^{25}/_{43}, {}^{43}/_{74}$, denen sich das von $q = {}^{29}/_{50}$ anschließen dürfte, bieten Skalen dar, die sich der üblichen so nahe anreihen, daß in der praktischen Musik jede derselben ihre Anwendung finden könnte, ohne daß wir einen erheblichen Unterschied wahrnehmen würden, wenn nicht ein anderes Bedenken entgegenstände, das die Anwendung dieser Temperaturen mislich machte. Während musikalische Autoritäten theilweise Unterschiede zwischen C# und D^b, F# und G^b u. s. w. geradezu läugnen, oder aber dieselben so unterscheiden, wie es die übliche Skala thut, nach welcher D^b höher liegt als C#, A^b höher als G# u. s. w., sind andere entgegengesetzter Ansicht und nehmen C# für höher an als D^b u. s. w. Namentlich scheinen praktische Musiker auf Streichinstrumenten sich der letzteren Ansicht zuzuneigen, einer Ansicht, die Herbart in den psychologischen Untersuchungen I. p. 101 auf folgende Weise zu begründen sucht: „Wir stellen", sagt er, „in Abrede, was die physikalischen Schriften von der sogenannten enharmonischen Tonfolge zu sagen pflegen. Nach ihnen sollen die Töne so auf einander folgen: c c# d^b d d# e^b e u. s. w. Fortschreitungen wie diese

$\bar{d}$	$\bar{e}^b$	$\bar{d}$#	$\bar{e}$
b	$\bar{c}$	h	h
f	f	f#	e
B	A	A	G#

sind in der Musik nicht selten. Nun weiß Jedermann, daß die falsche Quinte es im Sext-Quintenakkorde sich unterwärts auflösen muß, hingegen dis nach oben zu e hinstrebt. Wenn also ein Violinspieler oder Sänger es spielt oder singt, so treibt ihn sein Gefühl nach unten; soll er nun es in dis verwandeln, so bekommt er einen Impuls nach oben. In Folge dieses Impulses muß er den Ton es nicht erniedrigen (denn es wird ihm verboten, nach unten sich zu wenden), sondern ihn erhöhen, denn nach oben wird er getrieben in demselben Augenblicke, wo ihm vorgeschrieben ist dis anstatt es zu denken und zu spielen." — Ist diese Schlußfolgerung richtig, so haben auch die Musiker Recht, wenn sie auf Streichinstrumenten C# höher greifen als D^b, und mithin sind die vorher betrachteten Temperaturen für die praktische Musik nicht zulässig. Dies ist auch der Grund, warum der Prof. Drobisch in seiner Schrift noch andere Temperaturen weiter ausführt, in welchen die erhöheten Töne höher liegen als die darauf folgenden erniedrigten. Zwei davon, nämlich $q = {}^{24}/_{41}$ und $q = {}^{31}/_{53}$, sind schon oben als solche bezeichnet, die sich als Näherungswerthe des reinen Quintenintervalls ergaben. Von diesen beiden hat das zweite System einen entschiedenen Vorzug vor dem ersten, da in dem zweiten das Terzenintervall $= 0{,}33962$ der reinen Terz in der üblichen Skala näher liegt als in dem ersten, wo $t' = 0{,}34146$ ist. Ueber die übrigen Abweichungen der Intervalle dieser beiden Systeme von den entsprechenden der üblichen Skala cf. p. 84 und 86. Als eine Eigenthümlichkeit des letzteren Systems merkt der Prof. Drobisch p. 86 noch an, daß in demselben die Tonfolge

C D F^b F G H^{bb} c^b c

mit unmerkbaren Abweichungen die reine C-Durskala und ebenso die Tonfolge

c H^b G# G F D# D C

die absteigende reine C-Mollskala darstellt. Daran wird dann weiter die Aufgabe geknüpft: die Temperatur zu finden, in welcher die genannten Tonfolgen in möglich größter Reinheit die aufsteigende C-Dur- und absteigende C-Mollskala darstellen. Das Resultat der Rechnung ergiebt $q = 0{,}5847652$, ein Werth, dem $^{69}/_{118}$ sehr nahe kommt. Nehme ich das Intervall der großen Sekunde wieder wie vorhin, so lautet dieselbe Aufgabe: eine Temperatur zu bestimmen, in welcher die Tonfolge

C E^{bb} F^b F G H^{bb} c^b c

die aufsteigende C-Dur- und die Tonfolge

c A# G# G F D# E^{bb} C

die absteigende C-Mollskala in möglich größter Reinheit wiedergiebt.

Wird die Rechnung wie vorhin an $(d - 6 + 10x)^2 + (e - 5 + 8x)^2 + (g - x)^2 + (a - 6 + 9x)^2 + (h - 5 + 7x)^2$ ausgeführt, so ergiebt sich $x = \log\left(\frac{2^{215} \cdot 3^{23}}{5^{34}}\right) : 295 \log 2 = 0{,}5847861$, ein Werth von q, der von dem vom Prof. Drobisch gefundenen erst in der fünften Decimale um zwei Einheiten abweicht. Der sechste Näherungsbruch dieses q ist $= {}^{69}/_{118}$, derselbe, nach welchem Drobisch dieses System ausgeführt hat; diesem geht voraus ${}^{31}/_{53}$ und folgt ${}^{100}/_{171}$. In zweistelligen Zahlen giebt es also keinen Bruch, der dem q dieses Systems näher käme als ${}^{31}/_{53}$.

Die Frage, ob es nicht noch andere Systeme gebe, die bei derselben enharmonischen Tonfolge sich dem üblichen System und der mittleren Temperatur noch mehr nähern, erledigt Prof. Drobisch p. 87 und 88, indem er auf einfache Weise zeigt, daß bei merklicher Zunahme der Reinheit des Systems die Unterscheidbarkeit der erhöhten Töne von den erniedrigten in stärkerem Maße sich vermindert. Ist nämlich $C\sharp - D^b = 12q - 7$ gleich dem nten Theil des Intervalls der großen Sekunde, also $= \frac{2q-1}{n}$, so folgt $q = {}^1/_2 \cdot \left(\frac{7n-1}{6n-1}\right)$. Wird in dieser Gleichung n successive durch 4, 5, 6 — 15 ausgedrückt, so ergiebt sich, daß das System $q = {}^{69}/_{118}$ (für $n = 10$) für $12q - 7$ ${}^1/_{10}$ ganzen Ton giebt, dagegen für $n = 9$, $q = {}^{31}/_{53}$ noch ${}^1/_9$ ganzen Ton: ein Intervall, das kaum zu überschreiten sein dürfte, wenn der Unterschied zwischen $C\sharp$ und D^b dem gewöhnlichen Ohr noch entschieden bemerkbar bleiben soll. Denn nach den Untersuchungen von Delezenne, die der Prof. Drobisch p. 34 in der Anmerkung anführt, vermag das feinste musikalische Ohr 2 Töne, welche wechselsweise gehört werden, noch zu unterscheiden, wenn ihre Differenz $c \cdot {}^1/_{34}$ ganzen Ton beträgt, während dem ungeübten Ohr ihr Unterschied erst bei der Differenz ${}^1/_{17}$ g. T. bemerklich wird; der Unterschied zweier gleichzeitig gehörten Töne wird dagegen erst bemerkbar, wenn er ${}^1/_{11}$ g. T. beträgt. Man sieht hieraus, daß man bei den obigen Substitutionen für n wenigstens nicht über 10 hinausgehen darf. Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich ferner, daß man bei der Forderung $C\sharp$ soll höher sein als D^b 2c. in der Aufstellung von Temperaturen auf einen engen Raum beschränkt ist, indem man bei der Bestimmung des q nicht unter ${}^{69}/_{118}$ herabsteigen darf; zugleich ist es aber auch nicht erlaubt, bei der Werthbestimmung von q über das Intervall der reinen Quinte hinauszugehen, weil man sonst übermäßig hohe Terzen bekommen würde, wie sie nicht gestattet sein dürften. Alle diese möglichen Temperaturen innerhalb der gesteckten Grenzen sind aber unbedeutend verschieden von $q = 0{,}58496$ oder dem sehr genau damit übereinstimmenden Werthe von $q = {}^{31}/_{53}$.

III. Abschnitt.

Vergleichung des älteren und neueren Tonsystems.

§. 6.

Die im §. 1 angegebene diatonische Skala der alten Griechen hat nach der jetzigen Reihenfolge der Töne folgende Form:

C	D	E	F	G	A	H	c
1	$\frac{Q^2}{2}$	$\frac{Q^4}{4}$	$\frac{2}{Q}$	Q	$\frac{Q^3}{2}$	$\frac{Q^5}{4}$	2

wo Q die relative Schwingungszahl der Quinte darstellt. Diese Skala hat, wie schon bemerkt, die Eigenschaft, daß jedes Intervall zwischen zwei beliebigen Tönen dem entsprechenden Intervall, vom Grundton aus genommen gleich ist. Will man die chromatische Skala hieraus ableiten, so braucht man nur die relative Schwingungszahl der kleinen Terz $= \frac{4}{Q^3}$ aus D — F oder A — c zu bestimmen. Bezeichnet man die relative Schwingungszahl der großen Terz mit T′, die der kleinen mit T″, so ergiebt sich, wie §. 1 gezeigt, die einfache Erhöhung eines Tons, indem man die zugehörige relative Schwingungszahl mit $\frac{T'}{T''} = \frac{Q^7}{2^4}$; die einfache Erniedrigung, indem man mit $\frac{T''}{T'} = \frac{2^4}{Q^7}$ multipliciert. Durch Wiederholung desselben Verfahrens gelangt man von den einfach erhöhten und erniedrigten Tönen zu den doppelt erhöhten und doppelt erniedrigten u. s. w. Dabei bleibt das Verhältnis zwischen je zwei gleichnamig erhöhten oder erniedrigten Tönen immer dasselbe wie zwischen den entsprechenden Tönen der diatonischen Skala. Es ist klar, daß dieses Tonsystem, was den Bau und den Zusammenhang der Intervalle anbetrifft, nichts zu wünschen übrig läßt, und alle bisher betrachteten temperierten Systeme haben ja eben ihr Gepräge von diesem erhalten. Alle Intervalle dieses Systems sind durch den zu Grunde gelegten Werth von Q bestimmt, und man könnte es deshalb das Quintensystem nennen. Soll der durch Versuche gefundene Werth von $Q = {}^3/_2$, worin die Alten und Neueren übereinstimmen, festgehalten werden, so giebt dieses System für die in Musik gebräuchlichen Töne folgende Intervalle, wie sie in der Tabelle bis auf 5 Decimalen angegeben sind:

C	$0 = 0{,}00000$	c	$= 1{,}00000$
$H^{\sharp}$	$12q - 7 = 0{,}01955$	d^{bb}	$8 - 12q = 0{,}98045$
E^{3b}	$10 - 17q = 0{,}05564$	$A^{\sharp\sharp}$	$17q - 9 = 0{,}94436$
D^{b}	$3 - 5q = 0{,}07519$	H	$5q - 2 = 0{,}92481$
$C^{\sharp}$	$7q - 4 = 0{,}09474$	c^{b}	$5 - 7q = 0{,}90526$
$H^{\sharp\sharp}$	$19q - 11 = 0{,}11429$	d^{3b}	$12 - 19q = 0{,}88571$
E^{bb}	$6 - 10q = 0{,}15037$	$A^{\sharp}$	$10q - 5 = 0{,}84963$
D	$2q - 1 = 0{,}16992$	H^{b}	$2 - 2q = 0{,}83008$
$C^{\sharp\sharp}$	$14q - 8 = 0{,}18948$	c^{bb}	$9 - 14q = 0{,}81052$
F^{bb}	$9 - 15q = 0{,}22556$	$G^{\sharp\sharp}$	$15q - 8 = 0{,}77444$
E^{b}	$2 - 3q = 0{,}24511$	A	$3q - 1 = 0{,}75489$
$D^{\sharp}$	$9q - 5 = 0{,}26466$	H^{bb}	$6 - 9q = 0{,}73534$
F^{b}	$5 - 8q = 0{,}32030$	$G^{\sharp}$	$8q - 4 = 0{,}67970$
E	$4q - 2 = 0{,}33985$	A^{b}	$3 - 4q = 0{,}66015$
$D^{\sharp\sharp}$	$16q - 9 = 0{,}35940$	H^{3b}	$10 - 16q = 0{,}64060$
G^{bb}	$8 - 13q = 0{,}39549$	$F^{\sharp\sharp}$	$13q - 7 = 0{,}60451$
F	$1 - q = 0{,}41504$	G	$q = 0{,}58496$
$E^{\sharp}$	$11q - 6 = 0{,}43459$	A^{bb}	$7 - 11q = 0{,}56541$
A^{3b}	$11 - 18q = 0{,}47067$	$E^{\sharp\sharp}$	$18q - 10 = 0{,}52933$
G^{b}	$4 - 6q = 0{,}49022$	$F^{\sharp}$	$6q - 3 = 0{,}50978$

Vergleicht man die Intervalle dieses Tonsystems mit den temperierten Systemen für $q = {}^{31}/_{53} = {}^{69}/_{118}$, so findet man so geringfügige Differenzen, daß auch das feinste musikalische Ohr sie nicht bemerken würde. Ist aber die Schlußfolgerung Herbart's richtig, so konnten nur diese temperierten Systeme oder die in ihrer nächsten Nachbarschaft liegenden als zuläßig betrachtet werden. Dann fällt aber auch die Nothwendigkeit der Temperatur hinweg, indem dies reine Quintensystem ebendasselbe leistet wie die innerhalb der angegebenen Grenzen temperierten Systeme und außerdem den Vorzug hat, daß die relativen Schwingungszahlen aller Töne dieses Systems sich stets durch rationale Zahlen ausdrücken laßen. Daß das Intervall der großen Terz dieses Systems das der großen Terz in dem jetzt üblichen System um $c \cdot {}^1/_9$ g. T. an Höhe übertrifft, ist freilich ein Uebelstand, der sich durchaus, auch in den temperierten Systemen derselben Gattung, nicht beseitigen läßt; ob er aber so groß ist und den Uebelständen an Wichtigkeit gleichzustellen, die das jetzt übliche Tonsystem enthält, soll weiterhin noch erörtert werden. Dürfte aber die Terz nicht soviel verändert werden und müßte ihre Reinheit nothwendig dem Intervall $= 0{,}32193$ entsprechen, so zwingt uns dieses System das Quintenintervall $= 0{,}58048$ anzunehmen: eine Modification der Quinte, die allerdings erträglich sein möchte; dann müßte aber auch die im vorigen Paragraph gegebene Vorschrift, daß $C^{\sharp}$ höher als D^{b} zu nehmen, wieder umgestoßen werden. Man sieht, daß die jetzige Bestimmung der großen Terz, wenn sie eine Nothwendigkeit ist und nicht um das angegebene Maß modificiert werden darf, wenigstens in der Theorie unüberwindliche Schwierigkeiten erzeugt.

Schlagen wir jetzt einmal einen andern Weg zur Bestimmung der Intervalle ein, der uns vielleicht zur beßeren Beurtheilung des jetzt üblichen Tonsystems förderlich werden kann. Stellen wir uns also die Aufgabe, ein Tonsystem zu construieren, in welchem die Intervalle rein auf Terzen gebaut sind, und wählen dazu ein ganz einfaches Verfahren, das jeder Musiker sofort billigen wird. Wir schreiten nämlich vom Grundton aus um

Intervalle gleich der großen und kleinen Terz in folgender Weise fort: zuerst mit einer großen Terz, dann abwechselnd mit einer kleinen und großen, hierauf mit zwei kleinen Terzen und endlich wieder abwechselnd mit einer großen und kleinen Terz; dann wird jeder Musiker, wenn wir von C als Grundton ausgehen, diese ebengenannten Fortschreitungen mit E G H d f a c̄ bezeichnen, also mit den Tönen wie sie innerhalb zweier Oktaven in der diatonischen Skala vorkommen. Räumen wir aber dem Musiker das Recht ein, die so genommenen Intervalle also zu bezeichnen (und ich glaube sogar, daß er dazu völlig befugt ist, und daß jeder ihm beistimmen wird, der nicht von vorn herein durch eine Theorie eingenommmen ist), so ist es nun leicht daraus weitere Folgerungen zu ziehen. Bezeichnen wir nämlich die relative Schwingungszahl der großen Terz mit x, die der kleinen mit y, so ergiebt sich sofort die Gleichung $x^3 \cdot y^4 = 4$. In dieser Gleichung, $x = {}^5/_4$ gesetzt, muß $y^4 = \frac{4^4}{5^3}$, $y = {}^4/_5 \cdot \sqrt[4]{5}$, also y irrational sein und $\frac{\log y}{\log 2} = 0{,}25856$ (dann wird $q = 0{,}58048$). Dieses Intervall der kleinen Terz weicht von der gewöhnlichen Bestimmung desselben erst um 0,0045 ab: eine Differenz, die noch nicht einmal $^1/_{37}$ g. T. ausmacht, also selbst dem feinsten musikalischen Ohr noch nicht bemerklich wird, da nach den Versuchen von Delezenne dieses bei der Prüfung der Richtigkeit der Terz erst eine Abweichung wahrnimmt, die $^1/_{33{,}4}$ g. T. beträgt. Ob also das Intervall 0,26303 (in der üblichen Skala) oder 0,25856 als richtiges für die kleine Terz gelten muß, darüber kann auch das geübteste musikalische Ohr nicht entscheiden. Es fragt sich jetzt, wie es mit den andern Intervallen dieses Systems steht in Vergleich mit den im üblichen System festgestellten. Um die hervortretenden Unterschiede beßer übersehen zu können, mag hier eine Tabelle folgen, in der die am meisten vorkommenden Intervalle nach beiden Systemen (bis auf 3 Decimalen) einander gegenübergestellt sind, worin aber sowohl von den Modificationen, die der Prof. Drobisch im üblichen System aufgestellt hat, als von der von mir vorgeschlagenen der großen Sekunde abgesehen ist:

	Terzensystem	übl. Skala
C = 0	0,000	0,000
D^{bb}	0,034	0,052
C#	0,063	0,059
D^b	0,098	0,111
D	0,161	0,170
E^{bb}	0,196	0,204
D#	0,224	0,229
E^b	0,259	0,263
E	0,322	0,322
F^b	0,356	0,356
E#	0,385	0,381
F	0,420	0,415
F#	0,483	0,474

	Terzensystem	übl. Skala
c	0,000	0,000
H#	0,966	0,966
c^b	0,937	0,941
H	0,902	0,907
H^b	0,839	0,848
A#	0,804	0,796
H^{bb}	0,776	0,789
A	0,741	0,737
A^b	0,678	0,678
G#	0,644	0,644
A^{bb}	0,615	0,619
G	0,580	0,585
G^b	0,517	0,526

Vergleichen wir in dieser Tabelle zunächst nur die ganzen Töne mit einander, da diese allein vom Professor Drobisch als feststehend angegeben werden, so fällt offenbar die größte Differenz auf die große Sekunde (da bei allen übrigen die Abweichungen nur 0,004 bis 0,005 betragen), die eine Abweichung von $c \cdot {}^1/_{19}$ ($^1/_{18{,}9}$) giebt. Aber gerade diese Abweichung kann nach meiner Ueberzeugung weniger über die Richtigkeit dieses Terzensystems entscheiden, als die weit geringere des Quintenintervalls, wovon weiterhin die Rede sein soll. Denn wenn die Empfindlichkeit des feinsten musikalischen Gehörs bei der Beurtheilung der reinen Terz und reinen Quinte, die doch beide in der Musik als Consonanzen gelten, nach den Versuchen von Delezenne schon bedeutende Unterschiede zeigt, so würde es in der That auffallend und unerklärlich sein, wenn diese Empfindlichkeit bei der Beurtheilung eines Tons, der als Dissonanz gilt, also bei der Beurtheilung der reinen großen Sekunde, sowie der großen Septime, nicht in noch höherem Grade abnehmen sollte. Jedermann wird zugeben, daß in der Beurtheilung der reinen Oktave unser Ohr einen sicherern Maßstab besitzt, wie für jedes andere Intervall. Nun lehren aber die Versuche von Delezenne, daß das Ohr für die Reinheit der Quinte eine doppelt so feine Unterscheidungsgabe besitzt wie für die reine Terz, indem das feinste musikalische Ohr eine Abweichung $= {}^1/_{67{,}5}$ g. T. von der reinen Quinte wahrnimmt; dagegen eine Abweichung von der reinen Terz nur dann noch empfindet, wenn diese nicht geringer wird als $^1/_{33{,}4}$ g. T., während das gewöhnliche Ohr nur halb so große Unterschiede noch wahrnimmt. Ich bin überzeugt, daß die Empfindlichkeit des Ohrs für Dissonanzen, wie für eine große Sekunde oder Septime viel zu hoch angeschlagen wird, wenn man sie halb so groß annimmt als für die reine Terz. Aber dieses selbst zugegeben, so würde auch das feinste Ohr bei dieser Voraussetzung nicht mehr zu beurtheilen im Stande sein, welches von beiden in der aufgestellten Tabelle bei der großen Sekunde angegebenen Intervalle als das richtigere genommen werden müßte. Daß ein feines musikalisches Gehör Töne, die den Intervallen 0,170 und 1,161 entsprechen, wenn sie nach einander angegeben werden, überhaupt nicht mehr unterscheiden könnte, ist selbstverständlich nicht behauptet worden. Muß aber die Competenz des Ohrs über eine sichere, ganz genaue Feststellung der großen Sekunde innerhalb der in der Tabelle angegebenen Grenzen sehr bezweifelt, so muß sie in Bezug auf die große Septime innerhalb der angegebenen Grenzen entschieden geläugnet werden. Die große Septime ist durch Versuche genau durch die relative Schwingungszahl $^{15}/_{8}$ oder durch das Intervall 0,9069 fixiert, der genauere Werth derselben im Terzsystem ist $= 0{,}9024$. Dies giebt eine Differenz $= 0{,}045$ d. h. noch nicht $^{1}/_{37}$ g. T.: eine Differenz, die auch das feinste musikalische Ohr in diesem Falle nicht zu unterscheiden im Stande wäre, während doch in der Theorie eine oder die andere Bestimmung als die richtigere nachgewiesen werden müßte. Demnach muß ich es geradezu in Abrede stellen, daß die große Sekunde und Septime als feststehend betrachtet werden können, wenigstens insofern nicht, als sie durch Versuche fixiert sein sollen. Daraus geht aber die Mislichkeit hervor, bei der Aufstellung einer Skala durch Versuche andere Töne als consonierende so genau fixieren zu wollen, wie es in der jetzt üblichen Skala geschehen ist. Diese Mislichkeit würde jedem sofort einleuchten, wenn man es unternehmen wollte, alle erhöhten und erniedrigten Töne der chromatischen Skala nach dem Gehör zu fixieren. Ist dies aber nicht gestattet, nun so behaupte ich, daß man bei der Bestimmung der Intervalle der diatonischen Skala schon zu weit gegangen, wenn man auch die Dissonanzen durch Versuche **ganz genau** hat ermitteln wollen, während man sich bei diesen Versuchen auf die genaue Ermittelung der Consonanzen hätte beschränken sollen. Als Consonanzen bleiben dann noch außer der Oktave die beiden Terzen, die beiden Sexten, die Quinte, (und Quarte). Da E — A♭, E♭ — A, F — G sich zu Oktaven ergänzen, also von einander abhängig sind, so kann man die beiden Sexten und die Quarte ausscheiden. Es wird aber allgemein anerkannt, daß das Intervall der kleinen Terz das der großen zur Quinte ergänzt, folglich können wir nur die Terz und Quinte, oder die beiden Terzen als skalenbildende Töne betrachten. Der Musiker hat also ganz Recht, wenn er vom Grundton C ausgehend und mit Intervallen gleich der großen und kleinen Terz in der vorhin angegebenen Weise fortschreitend diese Fortschreitungen mit C E G H d f a $\bar{c}$ bezeichnet. Wir haben aber schon oben gezeigt, daß daraus die Gleichung $x^3 \cdot y^4 = 4$ mit Nothwendigkeit hervorgeht. Diese Gleichung wird aber eine bestimmte, sobald für x oder y oder auch für $x \cdot y$ ein Werth festgesetzt wird. Ist die vorhergehende Argumentation richtig, so kann auch die Richtigkeit dieser Gleichung nicht bezweifelt werden. Aus dieser Gleichung folgt aber mit Nothwendigkeit, daß **die Intervalle der Terz und Quinte**, sowie die Intervalle **der beiden Terzen von einander abhängig** sind: ein Gesetz, das, soviel mir bekannt, noch nicht nachgewiesen ist und, wie man leicht sieht, für die Beurtheilung einer Skala von der größten Bedeutung ist. Soll also als relative Schwingungszahl der großen Terz $^{5}/_{4}$ festgehalten werden, so müßen nun auch die der kleinen Terz mit $^{4}/_{5} \cdot \sqrt[4]{5}$ und die der Quinte mit $\sqrt[4]{5}$ bezeichnet werden, während die neuere Theorie dafür $^{6}/_{5}$ und $^{3}/_{2}$ aufstellt; soll aber die relative Schwingungszahl der Quinte $= {}^{3}/_{2}$ maßgebend sein, so muß die große Terz mit $^{81}/_{64}$, die kleine mit $^{32}/_{27}$ bezeichnet werden. Terz und Quinte können also nicht zu gleicher Zeit die relativen Schwingungszahlen $^{5}/_{4}$ und $^{3}/_{2}$ haben, und nur diejenigen Systeme, die auf reine Quinten ($^{3}/_{2}$) oder reine Terzen ($= {}^{5}/_{4}$ wenn diese Schwingungszahl als feststehend zu betrachten ist) gebaut sind, können für die praktische Musik als brauchbar angesehen werden; während andere Systeme, welche, wie die jetzt übliche Skala, für diese Intervalle Werthe haben, die nicht in der angegebenen Weise von einander abhängig sind, dieses Vortheils entbehren, und erst durch Temperatur geändert werden müßen, wenn sie in allen Tonarten genügen sollen *).

---

*) Es mag bei dieser Gelegenheit gestattet sein, noch einer Temperatur Erwähnung zu thun, die geradezu auf das obige Terzensystem führt. Die von Prof. Drobisch für $q = {}^{43}/_{74}$ aufgestellte Temperatur ist auf die Weise hervorgegangen, daß D E G A H als skalenbildende Töne angenommen sind, indem die übrigen als davon abhängig nachgewiesen werden. Diese Nachweisung erstreckt sich aber nur auf die erniedrigten Töne. Zieht man bei dieser Temperatur auch die Erhöhung der Töne in Betracht und nimmt man c♯ bei der zu berechnenden Temperatur mit auf und führt nun die Rechnung wie in §. 5 an dem Ausdruck

$$(c\sharp + 4 - 7x)^2 + (d + 1 - 2x)^2 + (e + 2 - 4x)^2 + (g - x)^2 + (a + 1 - 3x)^2 + (h + 2 - 5x)^2$$

aus, so erhält man für q den Werth $^{1}/_{4} \dfrac{\log 5}{\log 2} = 0{,}58048$ wie oben.

Beide Systeme, sowohl das reine Terzensystem für $T' = {}^5/_4$ als das reine Quintensystem für $Q = {}^3/_2$ können, wie schon oben bemerkt, für die praktische Musik als maßgebend angesehen werden, indem nur bei den Tasteninstrumenten in ihrer jetzigen Einrichtung eine Ausnahme zu machen ist, insofern für diese, da $C\# = D^b$ wird, als einzig zuläßige Temperatur $q = {}^7/_{12}$ nothwendig angewandt werden muß. Es fragt sich jetzt, welches von diesen beiden Systemen, das Terzensystem oder das Quintensystem den Vorzug verdient, da beide in gleichem Maße zur praktischen Anwendung geeignet sind. Der von Herbart (siehe §. 5.) angeführte Grund, der aus der enharmonischen Verwechslung hergenommen ist, sowie die Ansichten praktischer Musiker auf Saiteninstrumenten, die $C\#$ höher als D^b nehmen (was nur im Quintensystem der Fall ist), sprechen für letzteres. Ich kann nicht umhin mich in dieser Beziehung auf die Ansicht des hiesigen Musikdirektors Meyer zu berufen der als ein sehr tüchtiger Spieler auf der Baßgeige hier bekannt ist. Ein Versuch auf seiner Baßgeige ergab bei oberflächlicher, aber für den Zweck vollkommen genügender Meßung das Intervall von $G - A^b$ auf der Gsaite 2″ 6‴ (rheinl. Duod. Maß), das Intervall $G - G\#$ aber c. 3″, während $G - A$ 5″ gab. Ist diese Meßung auch nur annäherungsweise richtig, so geht daraus doch soviel mit Sicherheit hervor, daß die Musiker auf Streichinstrumenten, wenigstens solche, die derselben Schule angehören, entschieden dem Quintensystem bei ihrem Spiele folgen, sowie sie auch ihre Instrumente nach Quinten (Quarten) einstimmen. Schließlich möchte ich noch einen Grund anführen, der mir zu Gunsten des reinen Quintensystems zu sprechen scheint. Die von Delezenne angeführten Versuche ergeben, wie schon vorhin bemerkt, daß das feine Gehör der Musiker für die Reinheit der Quinte eine doppelt so große Empfindlichkeit besitzt, wie für die der Terz. Dazu kommt, daß die alten Griechen, denen eine entschieden feine Beobachtungsgabe nicht abgesprochen werden kann, das Intervall der Quinte ebenfalls durch die relative Schwingungszahl ${}^3/_2$, während sie die (kleine) Terz durch ${}^{32}/_{27}$ bestimmt haben. Soll man also für $Q = {}^3/_2$, oder $T' = {}^5/_4$ sich entscheiden, so scheint es jedenfalls gerathener, der ersteren Bestimmung den Vorzug zu geben. Wenn aber auch ein Ton, der genau die relative Schwingungszahl ${}^5/_4$ hat, von dem Ohr als eine wohlthuende Consonanz zu dem Grundton empfunden wird, so ist dies noch kein zureichender Grund denselben als die absolut richtige Terz zu bezeichnen; im reinen Quintensystem ist sie wenigstens nicht anwendbar. Im reinen Quintensystem liegen überhaupt die ganzen Töne bis auf F höher als im reinen Terzensystem (${}^5/_4$) (sowie in der jetzt üblichen Skala bis auf D und F) und in der mittleren Temperatur, welche die Intervalle auf den Tasteninstrumenten bestimmt. Darin scheint mir aber auch mit ein Grund zu liegen, warum ein Tonstück allein von Streichinstrumenten vorgetragen, einen ganz anderen Charakter bekommt, als wenn es auf dem Klavier ausgeführt wird. Namentlich scheinen mir die Durtonarten auf Streichinstrumenten etwas Frischeres (ich weiß keinen bezeichnenderen Ausdruck) zu haben als auf den Tasteninstrumenten. Der Unterschied zwischen Dur und Moll kann natürlicherweise auf letzteren nicht so grell hervortreten als auf den Streichinstrumenten, da bei ersteren die kleine und große Terz sich bedeutend näher rücken (cf. Tabellen pag. **14** und pag. 9) und also von ihrem eigenthümlichen Charakter einbüßen.

Zum Schluß noch ein Wort über Consonanzen. Als solche gelten bekanntlich in der Musik die Oktave, die beiden Terzen und Sexten und die Quinte, zu der man die Quarte noch hinzufügen kann. Das Verhältnis der Schwingungszahlen zwischen Grundton und Oktave ist $1:2$, zwischen Grundton und Quinte $2:3$, zwischen Grundton und Quarte $3:4$. Es war natürlich, daß man bei der Bestimmung der beiden Terzen auf die Verhältniszahlen $4:5$ und $5:6$ kam, da diese den Verhältniszahlen nach dem reinen Quintensystem, nämlich ${}^{81}/_{64}$ und ${}^{32}/_{27}$ ziemlich nahe kommen. Vielleicht ist dies der Grund gewesen, der zu der jetzt üblichen Bestimmung der beiden Terzen geführt hat. Die obige Auseinandersetzung wird aber gezeigt haben, daß diese Bestimmungen nicht neben einander bestehen können. Die Annahme von $T' = {}^5/_4$ führt vielmehr zu Irrationalzahlen bei der Bestimmung der kleinen Terz und der Quinte, während bei der Annahme von $Q = {}^3/_2$ die relativen Schwingungszahlen aller in der Musik üblichen Töne sich rational ausdrücken laßen. Ob die angeführten Gründe dazu berechtigen, dem reinen Quintensystem, wenigstens bei den Streichinstrumenten, vor allen anderen Tonsystemen den Vorzug einzuräumen, mögen die Leser selbst prüfen. Daß der Verfaßer dieser Abhandlung nicht der Neuerungssucht hold ist, zeigt schon das Resultat, zu welchem sie gelangt, indem dieses Quintensystem, mit geringer Modification, ja schon im Alterthum bekannt war und von seinen Urhebern mit Recht das Pythagoreische genannt werden kann.

Schulnachrichten.

1. Chronik.

1. Auch im verfloßenen Schuljahre hatten wir uns, da Dr. Hausing nicht seine sämmtlichen Lehrstunden versehen konnte, der durch den Schulamts-Candidaten Dr. Müller geleisteten Aushülfe zu erfreuen.

2. Durch eine Verwilligung des Königlichen Ober-Schul-Collegiums wurde es möglich gemacht den bis dahin für alle Schüler der Realschule gemeinschaftlichen Zeichenunterricht von Johannis an in zwei Abteilungen zu zerlegen.

2. Unterrichtsmittel und Sammlungen.

1. Bei den Anschaffungen für die Bibliothek wurde im verfloßenen Jahre vorzugsweise die Mathematik bedacht.

2. Außerdem hat die Bibliothek durch Schenkungen, die wir dankbar erkennen, einen sehr schätzbaren Zuwachs erhalten.

Durch die Municifenz Seiner Majestät, unseres allergnädigsten Königs, erhielten wir den dritten und vierten Jahrgang der Werke von Johann Sebastian Bach.

Königliches Gesammt-Ministerium übersandte den dreizehnten Band der Monumenta Germaniae historica; Königliches Ministerium des Innern: von Estorff's heidnische Alterthümer in der Gegend von Ülzen, nebst Atlas.

Königliches Ober-Schul-Collegium übermittelte uns das erste und zweite Doppelheft der Zeitschrift des historischen Vereins für Niedersachsen, Jahrgang 1851, und den vierten Band von Plinii historia naturalis, edd. Sillig.

Die Provinzial-Landschaft des Fürstentums Lüneburg übersandte uns den ersten Band des Archivs für Geschichte und Verfaßung des Fürstentums nebst Jacobis Landschaftlicher Verfaßung desselben.

Endlich verdanken wir der Liberalität der Hahnschen Hofbuchhandlung zu Hannover eine Anzahl von Werken eigenen Verlags, deren Auswahl bis zum Betrage von vierzig Talern uns überlaßen wurde.

3. Die Schüler der drei oberen Gymnasialclassen schenkten dem Johanneum die funfzehn großen Geschichtsbilder von C. Hermann, welche gegenwärtig eine Zierde unseres Hörsaals bilden.

3. Abiturienten zu Ostern 1855.

Die Maturitätsprüfung wurde am 13. März gehalten. Das Zeugnis der Reife erhielten:

Johann Karl Theodor Mannes aus Breinum.
Johann Karl Samuel von Berger aus Hannover.

Gottfried Wilhelm Eduard Rudolf Haage aus Lüneburg.
Friedrich August Wilhelm Theodor Gelpke aus Salzderhelden.
Ernst Georg Bernhard Mehliß aus Goslar.
Ernst Friedrich Philipp Rudolf Bokelberg aus Gifhorn.
Adolf Ludwig Christian, Graf von Reventlow aus Bordesholm.
Heinrich Julius Wilhelm Grütter aus Lüne.

Theologie werden studieren die Abiturienten Mannes, Gelpke, Grütter. — Jurisprudenz die Abiturienten von Berger, Mehliß, Bokelberg, Graf von Reventlow. — Philologie der Abiturient Haage.

Die Abiturienten Mannes, Haage, Mehliß, Bokelberg und Grütter werden die Universität Göttingen; von Berger und von Reventlow die Universität Heidelberg; Gelpke wird die Universität Erlangen beziehen.

4. Schulfeierlichkeiten.

Sonnabend, den 24. März, von 9 — 1 Uhr, Prüfung der Classen I, II, III.
Montag, den 26. März, von 8 — 11 Uhr, Prüfung der Realklassen. — Nachmittags von 2 — 5 Uhr Prüfung der Classen IV, V, VI.
Dinstag, den 27. März, von 9 — 11 Uhr, Prüfung der Classe VII.
Mittwoch, den 28. März, 9 Uhr, Schulactus.

1. Vorlesung der Censuren und Bekanntmachung der Versetzung.
2. Reden der Abiturienten Haage und Mehliß.
3. Entlaßung der Abiturienten.

Anfang des neuen Schuljahrs den 16. April.

Die Prüfung der neu aufzunehmenden Schüler wird am 14. April, von 9 Uhr Morgens an, im Johanneum stattfinden.

C. A. J. Hoffmann.

Statistischer Jahrsbericht über das Johanneum.

Vom December 1854.

	Anzahl der Schüler												
	Gymnasium								Realschule				Total-summe
	VII	VI	V	IV	III	II	I	Summa	III	II	I	Summa	
Bestand am 17. Januar 1854													
a. Studierende	. .	. .	. .	31	33	30	18						
	58	41	57					278					
b. Nichtstudierende	. .	. .	. .	7	3	—	—		41	37	8	86	
Überhaupt	58	41	57	38	36	30	18	278	41	37	8	86	364
Darunter Auswärtige	5	8	14	18	28	23	14	110	17	17	3	37	147
Im Jahre 1854 neu aufgenommen	27	9	14	6	9	—	—	65	7	12	—	19	84
(Aus dem Gymnasium	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	32)	
												51	
Abgegangen im Jahre 1854													
1. zur Universität	—	—	—	—	—	—	7	7	—	—	—	—	7
2. zur polytechnischen Schule	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	1
3. zu sonstigen Fachschulen	—	—	—	—	1	—	1	2	—	—	1	1	3
4. zu andern Schulen	—	—	2	3	6	3	—	14	—	1	—	1	15
5. direct ins bürgerliche Leben	—	—	1	—	1	3	1	6	10	15	5	30	36
6. unbestimmt	6	1	2	1	1	1	—	12	—	—	—	—	12
7. durch den Tod	1	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	1
Im Ganzen	7	1	5	4	9	7	9	42	10	16	7	33	75
(In die Realschule	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	32)					
								74					
Bestand am 12. December 1854	43	53	59	34	31	28	21	269	49	47	8	104	373
Darunter Auswärtige	1	11	18	17	22	21	15	105	17	27	3	47	152
Curse der Classen nach Jahren in	2	1	2	2	2	2	2		2	2	2		
Durchschnittsalter der Schüler nach Jahren im December 1854	8 1/4	10 1/4	12	13 3/4	15 1/2	17 1/2	18 2/3		13 2/3	14 2/3	16 1/4		

Datum der Entleihung bitte hier einstempeln!

17. 8. 96		