Programm

der

zur Abhaltung von Abiturienten-Prüfungen berechtigten

und

den Realschulen erster Ordnung in den entsprechenden Klassen gleichgestellten

Höhern Bürgerschule

zu **Delitzsch.**

Inhalt:

Winkeltheilung, speciell Trisection

vom Oberlehrer Günther

und

Nachrichten über die Anstalt aus dem Schuljahre

von Ostern 1876 bis Ostern 1877

von dem Rector.

Schnellpressendruck von B. Meyner in Delitzsch.

1877. Progr. Nr. 218.

Fig. I.

Fig. II.

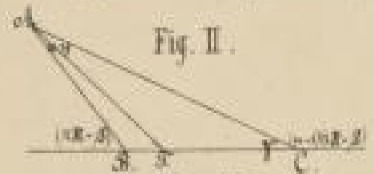


Fig. III.

Fig. IV.

Fig. V.

Fig. VI.

Fig. VII.

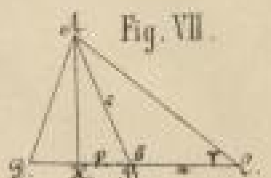


Fig. VIII.

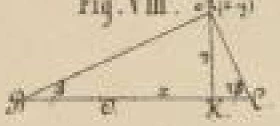


Fig. IX.

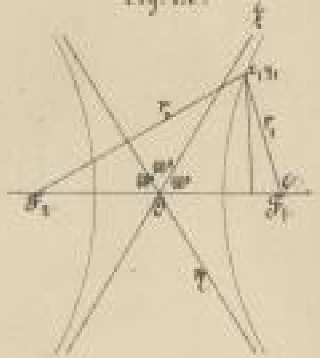


Fig. X.

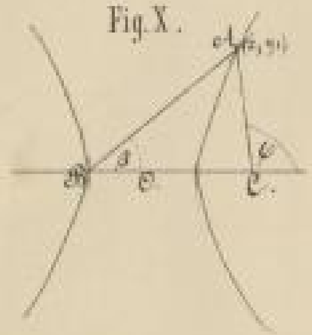


Fig. XI.

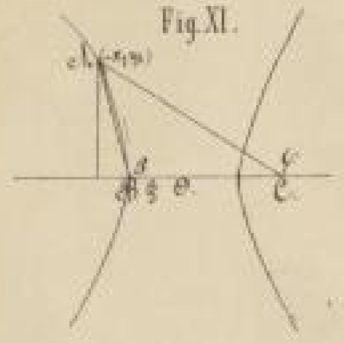


Fig. XII.

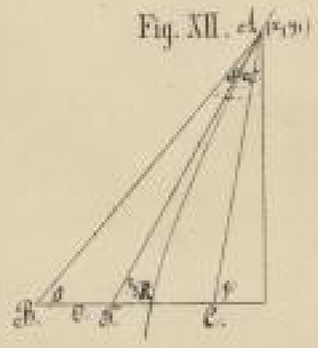


Fig. XIII.

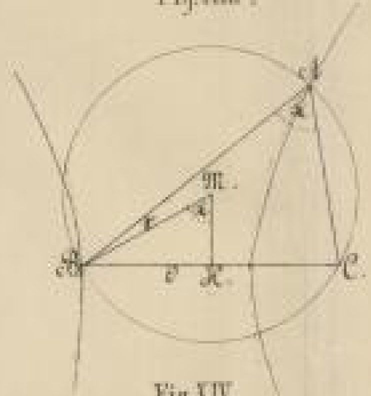


Fig. XIV.

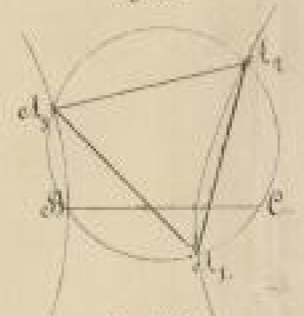


Fig. XV.

Fig. XVI.

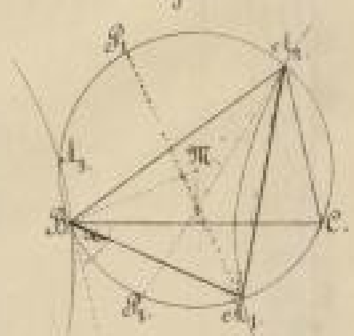


Fig. XVII.

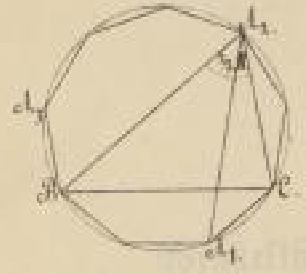


Fig. XVIII.

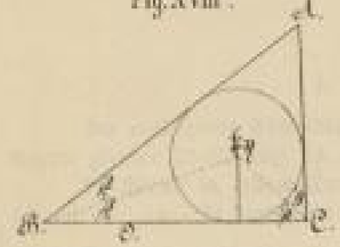


Fig. XIX.

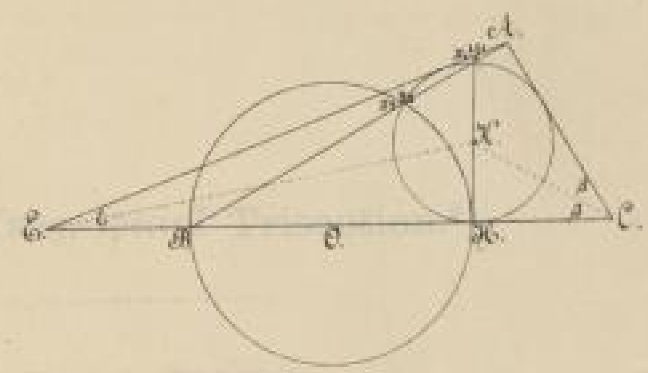


Fig. XX.

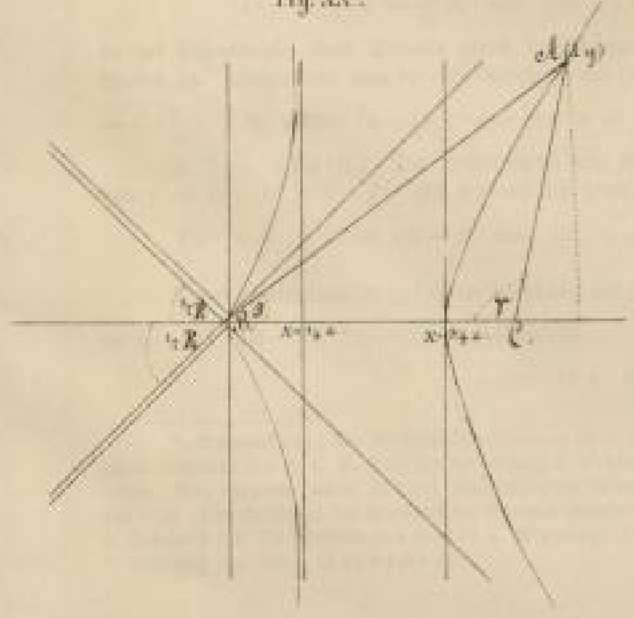


Fig. XXI.

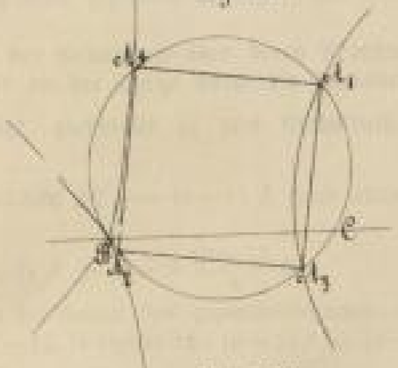
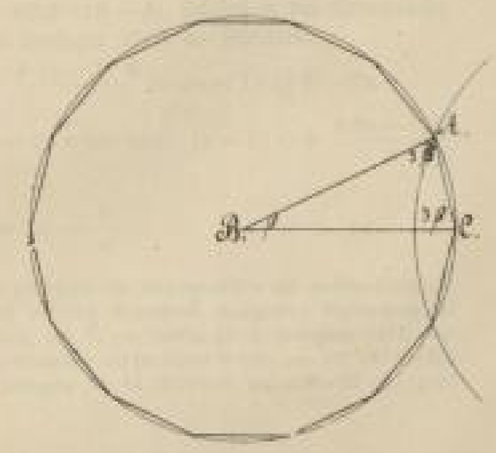


Fig. XXII.



Winkeltheilung, speciell Trisection.*)

§. 1. Princip der Winkeltheilung.

Die vorliegende Abhandlung über die Theilung eines gegebenen Winkels in eine bestimmte Anzahl gleicher Theile stützt sich auf folgenden Satz:

1.) Wenn in einem Dreieck die Winkel an der Grundlinie oder deren Nebenwinkel sich wie 1 : (n — 1) verhalten, so wird der Winkel an der Spitze durch die Transversale, deren Neigung gegen die Grundlinie $\frac{2}{n}$ R beträgt, gleichfalls in dem Verhältniß von 1 : (n — 1) getheilt.

Beweis: I. Fall. (Fig. I.) Es sei im Dreieck ABC $\measuredangle \gamma = (n-1)\,\beta$, dann erhält man die Gleichungen:

$$(1)\quad \beta + x = \frac{2}{n}\,R \quad \text{und} \quad (2)\quad (n-1)\,\beta + y = 2\,\frac{(n-1)}{n}\,R,$$

da der Außenwinkel eines Dreiecks gleich der Summe der beiden ihm gegenüberliegenden innern Winkel ist. Multiplicirt man die erste Gleichung mit $(n-1)$, so ergiebt sich: $(n-1)\,\beta + (n-1)\,x = \frac{2\,(n-1)}{n}\,R$; mithin $(n-1)\,x = y$ oder $x = \frac{\alpha}{n}$.

II. Fall. (Fig. II.) Der Nebenwinkel von β beträgt $(2R - \beta)$, folglich ist der Nebenwinkel von $\gamma = (n-1)\,(2R-\beta)$. Es ergeben sich dann in analoger Weise die Gleichungen

$$(1)\quad x + \frac{2}{n}\,R = 2R - \beta \quad \text{und} \quad (2)\quad y + \frac{2\,(n-1)\,R}{n} = (n-1)\,(2R-\beta).$$

Durch Multiplication der ersten Gleichung mit $(n-1)$ erhält man: $(n-1)\,x + \frac{2\,(n-1)\,R}{n} = (n-1)\,(2R-\beta)$. Hieraus folgt ebenfalls

$$y = (n-1)\,x \quad \text{oder} \quad x = \frac{\alpha}{n}.$$

---

*) **Anmerkung:** Die Geschichte der Trisection ist in der Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht von J. C. V. Hoffmann (Leipzig b. Teubner) mehrfach Gegenstand eingehender Besprechung gewesen. Man vergleiche neben Klügel (mathematisches Wörterbuch, Bd. V. pag. 340 u. f.) 3. Jahrgang (1872) pag. 215—40 (Hippauf-Lösung des Problems der Trisection mittelst der Conchoide auf circularer Basis), pag. 537 (Albrich); 4. Jahrgang pag. 176 (Urtheile von Garbe u. Minding); 5. Jahrgang pag. 64 (Sidler), pag. 226—27 (Kurtze); 7. Jahrgang pag. 107—13 (Emsmann).

2.) Umkehrung: Wenn die Transversale, welche einen Dreieckswinkel in dem Verhältniß von 1 : (n — 1) theilt, die Gegenseite unter einem Winkel $= \frac{2\,R}{n}$ trifft, so verhalten sich auch die beiden andern Dreieckswinkel oder deren Nebenwinkel wie 1 : (n — 1).

Beweis: I. Fall. (Fig. I.)

$$(1)\quad \beta + \frac{\alpha}{n} = \frac{2\,R}{n} \quad \text{und} \quad (2)\quad \gamma + \frac{(n-1)\,\alpha}{n} = \frac{2\,(n-1)\,R}{n}$$

Multiplicirt man die 1. Gleichung mit (n — 1), so lautet sie: $(n-1)\,\beta + \frac{(n-1)\,\alpha}{n} = \frac{2\,(n-1)\,R}{n}$; folglich $\gamma = (n-1)\,\beta$.

II. Fall. (Fig. II.) In gleicher Weise erhält man:

$$\frac{\alpha}{n} + \frac{2\,R}{n} = (2\,R - \beta) \text{ und } \frac{(n-1)\,\alpha}{n} + \frac{2\,(n-1)\,R}{n} = 2\,R - \gamma;$$

ferner $\frac{(n-1)\,\alpha}{n} + \frac{2\,(n-1)\,R}{n} = (n-1)\,(2\,R - \beta)$; somit

$2\,R - \gamma = (n-1)\,(2\,R - \beta)$.

3.) **Folgerung.** Nach Lehrsatz I. schneidet die Transversale den nten Theil des Winkels α ab; es ist dadurch ein Mittel gefunden, den Winkel α in n gleiche Theile zu theilen.

4.) β wächst, wenn α abnimmt und umgekehrt; β erreicht daher für $\alpha = 0$ sein Maximum $\left(\frac{2\,R}{n}\right)$ und für $\alpha = 2\,R$ sein Minimum (o).

Folgerung. $\frac{2\,R}{n} > \beta > 0$, vorausgesetzt, daß $\gamma = (n-1)\,\beta$ ist.

5.) Mit der Zunahme von α wächst auch der Nebenwinkel von β; beide erreichen daher gleichzeitig ihr Maximum und Minimum. Für $\alpha = 0$ wird $\sphericalangle\,(2\,R - \beta) = \frac{2\,R}{n}$. Da aber der Winkel $(n-1)\,(2\,R - \beta) < 2\,R$ sein muß, so ist das Maximum von $(2\,R - \beta) = \frac{2\,R}{n-1}$

Folgerung. $\frac{2\,R}{n-1} > (2\,R - \beta) > \frac{2\,R}{n}$, vorausgesetzt, daß $(2\,R - \gamma) = (n-1)\,(2\,R - \beta)$ ist.

6.) Erreicht der Winkel $(2\,R - \beta)$ sein Maximum $\frac{2\,R}{n-1}$, so ergiebt sich weiter:

$$x = \frac{\alpha}{n} = \frac{2\,R}{n-1} - \frac{2\,R}{n} = \frac{2\,R}{n\,(n-1)},$$

mithin ist das Maximum von $\alpha = \frac{2\,R}{n-1}$

Folgerung. Unter der Voraussetzung, daß $\gamma = (n-1)\,\beta$ ist, ist $\alpha < 2\,R$; setzt man dagegen voraus, daß $(2\,R - \gamma) = (n-1)\,(2\,R - \beta)$ ist, so ist $\alpha < \frac{2\,R}{n-1}$ d. h. nach dem ersten Falle kann man alle Winkel, welche $< 2\,R$ sind, in n gleiche Theile zerlegen, nach dem zweiten Falle nur solche Winkel, welche $< \frac{2\,R}{n-1}$ sind.

7.) Man kann von der Spitze A eine zweite Linie ziehen, welche die Grundlinie oder deren Verlängerung ebenfalls unter einem Winkel $= \frac{2 R}{n}$ schneidet. Ist nun $\gamma = (n - 1) \beta$, so fällt diese außerhalb des Dreiecks, wenn $\gamma > \frac{2 R}{n}$ ist, sie fällt mit der Dreiecksseite AC zusammen, wenn $\gamma = \frac{2 R}{n}$ ist, und innerhalb des Dreiecks, wenn $\gamma < \frac{2 R}{n}$ ist. Oder auch: man erhält die Lagen der zweiten Linie in der angegebenen Reihenfolge, je nachdem $\alpha \lesseqgtr \frac{2 (n - 2) R}{n - 1}$ ist. Im letzten Falle existiren also zwei Transversalen, welche die Grundlinie unter einem Winkel $= \frac{2 R}{n}$ schneiden. Von diesen beiden hat jedoch nur die dem Punkte B zunächst gelegene die Eigenschaft, den Winkel α in dem Verhältniß $1 : (n - 1)$ zu theilen.

Ist $(n - 1) (2 R - \beta) = (2 R - \gamma)$, so liegt stets nur eine, die Winkel theilende Transversale innerhalb des Dreiecks.

§. 2. Geometrischer Ort des Punktes A.

1.) Im Anschluß an den Lehrsatz im §. 1. wird die Aufgabe gestellt:

Es soll der geometrische Ort für die Spitzen aller Dreiecke gefunden werden, wenn die Winkel an der festliegenden Grundlinie in dem Verhältniß von $1 : (n - 1)$ stehen.

Lösung (Fig. III.) Es sei im Dreieck ABC die Grundlinie $BC = a$ fest, der Punkt A beweglich und $\gamma = (n - 1) \beta$. Nimmt man ferner B zum Anfange eines rechtwinkligen Coordinatensystems und BC zur x Axe, so erhält man, wenn (x, y) die Coordinaten des Punktes A sind, die beiden zusammengehörigen Gleichungen:

$$(1) \quad \tan \beta = \frac{y}{x}; \quad (2) \quad \tan (n - 1) \beta = \frac{y}{a - x}.$$

Eliminirt man noch aus beiden Gleichungen β, so erhält man die Gleichung des gesuchten geometrischen Ortes.

2.) Es ist leicht einzusehen, daß der Grad der Gleichung für die Ortscurve einzig von n abhängig ist und im Allgemeinen um so höher sein muß, je größer der Zahlenwerth von n ist. Zur nähern Feststellung dieses Abhängigkeitsverhältnisses führt folgender Satz:

„Stehen in einem Dreieck die Winkel an der Grundlinie in dem Verhältniß von $1 : (n - 1)$, so wird der Ort der Dreiecksspitzen durch eine Gleichung vom $(n - 1)$ten Grade bestimmt.

Beweis:

$$\sin (n - 1) \beta = \sin (n - 2) \beta \cos \beta + \cos (n - 2) \beta \sin \beta, \ (1)$$
$$\sin (n - 2) \beta = \sin (n - 3) \beta \cos \beta + \cos (n - 3) \beta \sin \beta, \ (2)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\sin (n - k) \beta = \sin (n - k - 1) \beta \cos \beta + \cos (n - k - 1) \beta \sin \beta, \ (k)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\sin 3 \beta = \sin 2 \beta \cos \beta + \cos 2 \beta \sin \beta, \ (n - 3)$$
$$\sin 2 \beta = \sin \beta \cos \beta + \cos \beta \sin \beta, \ (n - 2)$$

Ebenso ist:

$$\cos (n - 1) \beta = \cos (n - 2) \beta \cos \beta - \sin (n - 2) \beta \sin \beta, \ (1)$$

$$\cos (n-2)\beta = \cos (n-3)\beta \cos\beta - \sin (n-3)\beta \sin\beta, \quad (2)$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\cos (n-k)\beta = \cos (n-k-1)\beta \cos\beta - \sin (n-k-1)\beta \sin\beta, \quad (k)$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\cos 3\beta = \cos 2\beta \cos\beta - \sin 2\beta \sin\beta, \quad (n-3)$$

$$\cos 2\beta = \cos\beta \cos\beta - \sin\beta \sin\beta, \quad (n-2)$$

Eliminirt man aus diesen $2(n-2)$ Gleichungen $\sin (n-2)\beta$, $\sin (n-3)\beta \ldots$ $\sin 2\beta$, sowie $\cos (n-2)\beta$, $\cos (n-3)\beta \ldots \cos 2\beta$, so bleiben noch 2 Gleichungen, deren linke Seiten $\sin (n-1)\beta$ und $\cos (n-1)\beta$ sind. Rechts erhält man eine Summe von Producten von der Form $\sin^k\beta \, . \cos^{n-k-1}\beta$, worin k eine ganze Zahl zwischen o und $(n-1)$ incl. bedeutet. Diese Gleichungen sind dann, wenn man zusammenfaßt, folgende:

$$(1)\quad \sin (n-1)\beta = \sin\beta \left\{ p_1 \cos^{n-2}\beta + p_2 \cos^{n-3}\beta \sin\beta + p_3 \cos^{n-4}\beta \sin^2\beta + \ldots p_{n-3} \cos^2\beta \sin^{n-4}\beta + p_{n-2} \cos\beta \sin^{n-3}\beta + p_{n-1} \sin^{n-2}\beta \right\}$$

$$(2)\quad \cos (n-1)\beta = q_1 \cos^{n-1}\beta + q_2 \cos^{n-2}\beta \sin\beta + q_3 \cos^{n-3}\sin^2\beta + \ldots + q_{n-2} \cos^2\beta \sin^{n-3}\beta + q_{n-1} \cos\beta \sin^{n-2}\beta + q_n \sin^{n-1}\beta.$$

Die Coefficienten $p_1\, p_2 \ldots p_{n-1}$ und $q_1\, q_2 \ldots q_n$ sind ganze Zahlen und entstehen durch Summirung der zusammengehörigen Producte.

Durch Division beider Gleichungen ergiebt sich weiter:

$$\tan (n-1)\beta = \frac{\sin\beta \left\{ p_1 \cos^{n-2}\beta + p_2 \cos^{n-3}\beta \sin\beta + \ldots p_{n-2} \cos\beta \sin^{n-3}\beta + p_{n-1} \sin^{n-2}\beta \right\}}{q_1 \cos^{n-1}\beta + q_2 \cos^{n-2}\beta \sin\beta + \ldots q_{n-1} \cos\beta \sin^{n-2}\beta + q_n \sin^{n-1}\beta.}$$

Dividirt man rechts noch Zähler und Nenner durch $\cos^{n-1}\beta$, so folgt:

$$\tan (n-1)\beta = \frac{\tan\beta \left\{ p_1 + p_2 \tan\beta + \ldots p_{n-2} \tan^{n-3}\beta + p_{n-1} \tan^{n-2}\beta \right\}}{q_1 + q_2 \tan\beta + \ldots q_{n-1} \tan^{n-2}\beta + q_n \tan^{n-1}\beta.}$$

Nun war vorher gefunden: $\tan (n-1)\beta = \dfrac{y}{a-x}$

und $\tan\beta = \dfrac{y}{x}$.

Setzt man diese Werthe in die letzte Gleichung ein, so erhält man:

$$\frac{y}{a-x} = \frac{\frac{y}{x}\left\{ p_1 + p_2 \cdot \frac{y}{x} + p_3 \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \ldots p_{n-2}\left(\frac{y}{x}\right)^{n-3} + p_{n-1}\left(\frac{y}{x}\right)^{n-2} \right\}}{q_1 + q_2\left(\frac{y}{x}\right) + q_3\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \ldots q_{n-1}\left(\frac{y}{x}\right)^{n-2} + q_n\left(\frac{y}{x}\right)^{n-1}}$$

Eine weitere Vereinfachung ergiebt dann:

$$\frac{1}{a-x} = \frac{p_1 x^{n-2} + p_2 x^{n-3} y + p_3 x^{n-4} y^2 + \ldots p_{n-2} x y^{n-3} + p_{n-1} y^{n-2}}{q_1 x^{n-1} + q_2 x^{n-2} y + q_3 x^{n-3} y^2 + \ldots q_{n-1} x y^{n-2} + q_n y^{n-1}}$$

oder

$$q_1 x^{n-1} + q_2 x^{n-2} y + q_3 x^{n-3} y^2 + \ldots q_{n-1} x y^{n-2} + q_n y^{n-1}$$
$$= (a-x)\left\{ p_1 x^{n-2} + p_2 x^{n-3} y + \ldots p_{n-2} x y^{n-3} + p_{n-1} y^{n-2} \right\}$$

Hieraus geht hervor, daß die Ortsgleichung des Punktes A vom $(n-1)$ten Grade, die obige Behauptung also eine richtige ist.

3. **Folgerung:** Die zuletzt gefundene Gleichung ist identisch mit derjenigen, welche durch Elimination von β aus: $\frac{y}{x} = \tan \beta$ und $\frac{y}{a-x} = \tan (n-1)\beta$ hervorgeht.

4. Nach §. 1, 3 ist zur Theilung des Winkels α in n gleiche Theile erforderlich, daß $\gamma = (n-1)\beta$ ist. Mithin ist die Gleichung für die Curve der n Theilung eines Winkels vom $(n-1)$ten, der Zweitheilung vom 1ten, der Dreitheilung vom 2ten, der Viertheilung vom 3ten u. s. w. Grade.

§. 3. Die winkeltheilende Transversale und die Construction regulärer Polygone.

1. Setzt man wieder voraus, daß im Dreieck ABC $\measuredangle\, \gamma = (n-1)\beta$ oder $(2R - \gamma) = (n-1)(2R - \beta)$ ist, so schneidet nach Lehrsatz I. die Transversale AT, welche unter $\frac{2}{n} R$ gegen BC geneigt ist, den $n$ten Theil des Winkels A ab. Dieser Neigungswinkel der winkeltheilenden Transversale ändert sich also beständig, wenn man für n andere Werthe annimmt; er beträgt z. B. für $n = 2$ (Zweitheilung) 1 R, für $n = 3$ (Dreitheilung) $\frac{2}{3}$ R, für $n = 4$ (Viertheilung) $\frac{1}{2}$ R, für $n = 5$ (Fünftheilung) $\frac{2}{5}$ R, für $n = 6$ (Sechstheilung) $\frac{1}{3}$ R, für $n = 7$ (Siebentheilung) $\frac{2}{7}$ R, für $n = 11$ (Elftheilung) $\frac{2}{11}$ R u. s. w. Diejenigen Neigungswinkel, welche zur Theilung eines Winkels in 2, 3, 4, 5, 6 u. s. w. nöthig sind, lassen sich leicht construiren. Es entsteht aber die Frage, ob man auch im Stande ist, die Construction eines Winkels $= \frac{2}{7}$ R oder $\frac{2}{11}$ R oder $\frac{2}{13}$ R auszuführen.

Zur Beantwortung dieser Frage sei wieder (Fig. IV.) im Dreieck ABC $\measuredangle\, \gamma = (n-1)\beta$. Man nimmt ferner an, daß die Curve, welche man zur Theilung eines Winkels in n gleiche Theile braucht, construirt sei, schlägt BC von B aus auf die Curve über und verbindet den Durchschnittspunkt A mit C. Das Dreieck ABC ist dann ein gleichschenkliges, folglich $\measuredangle\, A = \measuredangle\, C = (n-1)\beta$. Da nun die Winkelsumme eines Dreiecks 2 R beträgt, so erhält man die Gleichung

$$\beta + (n-1)\beta + (n-1)\beta = 2R,$$

$$\text{folglich } \beta = \frac{2R}{2n-1}.$$

Für $n = 2$ wird $\beta = \frac{2}{3}$ R
" $n = 3$ " $\beta = \frac{2}{5}$ R
" $n = 4$ " $\beta = \frac{2}{7}$ R
" $n = 5$ " $\beta = \frac{2}{9}$ R
" $n = 6$ " $\beta = \frac{2}{11}$ R
" $n = 7$ " $\beta = \frac{2}{13}$ R.

Die Construction eines Winkels $= \frac{2}{7}$ R oder $\frac{2}{9}$ R oder $\frac{2}{11}$ R oder $\frac{2}{13}$ R u. s. w. ist also möglich, wenn man bezüglich die Construction der Viertheilungs-, der Fünftheilungs-, der Sechstheilungs-, der Siebentheilungscurve u. s. w. auszuführen vermag.

2. Das gleichschenklige Dreieck ABC (Fig. IV.), in welchem jeder Basiswinkel $= (n-1)\beta$ und der Winkel an der Spitze $= \beta$ ist, kann man auch als Bestimmungs-Dreieck eines regulären Polygons ansehen, und zwar ist $\beta = \frac{2R}{2n-1}$ der Centriwinkel und AC Seite des regulären $(4n-2)$ecks.

Man erhält dann für specielle Werthe von n die Seiten folgender regulärer Polygone:

$n = 2$,	also $\beta = \frac{2}{3}$ R,	mithin AC Seite des regulären	6ecks
$n = 3$,	„ $\beta = \frac{2}{5}$ R,	„ „ „ „ „	10ecks
$n = 4$,	„ $\beta = \frac{2}{7}$ R,	„ „ „ „ „	14ecks
$n = 5$,	„ $\beta = \frac{2}{9}$ R,	„ „ „ „ „	18ecks
$n = 6$,	„ $\beta = \frac{2}{11}$ R,	„ „ „ „ „	22ecks
$n = 7$,	„ $\beta = \frac{2}{13}$ R,	„ „ „ „ „	26ecks.

Demnach führt die Construction der Viertheilungscurve (Gleichung des 3. Grades) zugleich zur Construction des regulären 14ecks, also auch des regulären 7ecks, die Construction der Sechstheilungscurve (Gleichung des 5. Grades) zugleich zur Construction des regulären 22ecks und damit auch des regulären 11ecks.

§. 4. Zweitheilung eines gegebenen Winkels.

Aus der allgemeinen Aufgabe der Theilung eines gegebenen Winkels in n gleiche Theile erhält man die specielle der Halbirung, wenn man $n = 2$ setzt.

Es ist dann $\gamma = (n - 1)\,\beta = \beta$, also ist das zur Halbirung eines Winkels erforderliche Dreieck ein gleichschenkliges. Zieht man die 2. Bedingung in Betracht, daß $2\,R - \gamma = (n - 1)\,(2\,R - \beta)$ ist, so folgt $2\,R - \gamma = 2\,R - \beta$, also $\beta = \gamma$; das Dreieck ABC ist ebenfalls ein gleichschenkliges. Die in der allgemeinen Aufgabe getrennten Fälle decken sich daher bei der Halbirung.

Der Neigungswinkel der winkeltheilenden Transversale $\frac{2\,R}{n}$ wird hier $= 1$ R.

Zur Bestimmung des Ortes von A waren die beiden Gleichungen gefunden:

$$(1)\quad \tan\beta = \frac{y}{x} \qquad\qquad (2)\quad \tan(n-1)\,\beta = \frac{y}{a-x}.$$

Für $n = 2$ werden die linken Seiten einander gleich, folglich $\frac{y}{x} = \frac{y}{a-x}$ oder $x = \frac{a}{2}$.

Verlegt man die Coordinaten parallel zur 1. Lage mit dem Anfange nach der Mitte von BC, so erhält man für den Ort des Punktes A die Gleichung: $x = o$, d. h. die Halbirungscurve ist eine gerade Linie, welche mit der Y-Axe zusammenfällt.

Soll nun ein gegebener Winkel halbirt werden (Fig. V.), so legt man durch B und C einen Kreis, welcher den gegebenen Winkel α als Peripheriewinkel auf dem Bogen BC faßt. Dieser Kreis schneidet die Halbirungscurve ($x = o$) in zwei diametral entgegengesetzten Punkten A und A_1. Verbindet man noch diese beiden Durchschnittspunkte mit B und C, so wird durch die Halbirungscurve (Y-Axe), sowohl $\measuredangle$ A als sein Supplement halbirt.

§. 5. Das Trisectionsdreieck.

1. Aus dem allgemeinen Dreieck zur Theilung eines Winkels in n gleiche Theile erhält man das Trisectionsdreieck, wenn man $n = 3$ setzt.

Die Bedingungen desselben sind: 1.) $\gamma = 2\,\beta$ und 2.) $2\,R - \gamma = 2\,(2\,R - \beta)$; d. h. **ein Trisectionsdreieck ist dasjenige, in welchem entweder die Basiswinkel oder deren Supplemente sich wie 1 : 2 verhalten.**

Nach den Erörterungen im §. 1, 4—6. darf β, wenn $\gamma = 2\,\beta$ ist, die Grenzen o und $\frac{2}{3}$ R nicht überschreiten, während α bis 2 R wachsen kann. Setzt man dagegen voraus, daß $2\,R - \gamma = 2\,(2\,R - \beta)$ ist, so liegt das Supplement von β zwischen den Grenzen $\frac{2}{3}$ R und 1 R, während

α nur von o bis 1 R wachsen kann; d. h. im ersten Falle kann α spitz, rechtwinklig oder stumpfwinklig sein, im zweiten Falle nur spitzwinklig.

Die Neigung der trisecirenden Transversale gegen die Grundlinie beträgt $\frac{2}{3}$ R.

Trisectionsdreiecke sind beispielsweise: das rechtwinklig gleichschenklige Dreieck, dessen Grundlinie eine Kathete ist, oder das rechtwinklige Dreieck, in welchem die Winkel an der Hypothenuse $\frac{2}{3}$ R und $\frac{1}{3}$ R betragen, oder das Bestimmungsdreieck des regulären Zehnecks, in welchem man einen Schenkel als Grundlinie ansieht. Zieht man von den Spitzen der genannten Dreiecke Transversalen, welche die Grundlinien unter Winkeln $= \frac{2}{3}$ R treffen, so wird in jedem dieser Dreiecke der 3. Theil des Winkels an der Spitze abgeschnitten, nämlich im 1. Falle $\frac{1}{6}$ R, im 2. $\frac{1}{3}$ R und im 3. $\frac{4}{15}$ R.

2. Es mögen noch einige Erörterungen über das Trisectionsdreieck hier Platz finden.

Zunächst wird gefragt: „Welche Beziehung besteht zwischen den 3 Seiten des Trisectionsdreiecks?"

Lösung:

(a) Vorausgesetzt sei: $\gamma = 2\beta$. (Fig. VI.)

Man halbirt den Winkel C durch CT und fällt von C auf AB die Senkrechte CH. Dann ist $\triangle$ BCT gleichschenklig, mithin BT = CT = t, folglich AT = c — t. Wendet man nun auf die Dreiecke BCT und ACT den allgemeinen Pythagoras an, so erhält man, wenn man TH mit p bezeichnet:

$$a^2 = 2t^2 + 2pt \quad \text{und}$$
$$b^2 = t^2 + (c-t)^2 - 2(c-t)p = 2t^2 + c^2 - 2ct - 2cp + 2pt.$$

Durch Subtraction ergiebt sich: $a^2 - b^2 = -c^2 + 2ct + 2cp$;

$$\text{also } p = \frac{a^2 - b^2 + c^2 - 2ct}{2c}.$$

Setzt man diesen Werth von p in die erste Gleichung ein, so folgt:

$$a^2 = 2t^2 + \frac{a^2 - b^2 + c^2 - 2ct}{c} \cdot t$$

$$\text{oder } a^2 c = 2ct^2 + a^2 t - b^2 t + c^2 t - 2ct^2,$$

$$\text{mithin } t = \frac{a^2 c}{a^2 - b^2 + c^2}.$$

Da nun CT die Halbirungslinie des Winkels C ist, so erhält man die Proportion $a : b = t : c - t$, also $t = \frac{ac}{a+b}$; somit auch: $t = \frac{a^2 c}{a^2 - b^2 + c^2} = \frac{ac}{a+b}$.

Aus der letzten Gleichung ergiebt sich:

$$a^2 + ab = a^2 - b^2 + c^2 \quad \text{oder} \quad \mathbf{ab = c^2 - b^2}$$

d. h: **Ist in einem Dreieck ein Winkel doppelt so groß als ein zweiter, so ist die Differenz der Quadrate ihrer Gegenseiten gleich dem Rechteck aus der kleinern und der dritten.**

(b) vorausgesetzt sei: $2R - \gamma = 2(2R - \beta)$. (Fig. VII.)

Man macht DC = AC, verbindet A mit D und fällt von A auf CD das Loth AH. Dann ist AC = DC = b, folglich $\measuredangle D = \frac{1}{2}(2R - \gamma)$, ebenso ist $\measuredangle ABD = \frac{1}{2}(2R - \gamma)$ n. d Voraussetzung; also $\measuredangle ABD = \measuredangle ADB$. Hieraus folgt: AD = AB = c und DH = BH = p.

Weiter erhält man für die Dreiecke ACB und ACD nach dem allgemeinen Pythagoras:

$$b^2 = a^2 + c^2 + 2ap \text{ und } b^2 = b^2 + c^2 - 2bp;$$

$$\text{folglich } p = \frac{b^2 - a^2 - c^2}{2\,a} = \frac{c^2}{2\,b} \text{ und}$$

$$b^3 - a^2\,b - bc^2 = ac^2 \text{ oder}$$

$$b\,(b^2 - a^2) = c^2\,(b + a)$$

$$\text{also} \qquad \mathbf{ab = b^2 - c^2}$$

d. h.: **ist in einem Dreieck das Supplement eines Winkels doppelt so groß als das eines zweiten, so ist die Differenz der Quadrate ihrer Gegenseiten gleich dem Rechteck aus der größern und der dritten.**

Auch die Umkehrung dieser Sätze läßt sich nachweisen.

c.) Wenn in einem Dreieck (Fig. VI.) die Differenz der Quadrate zweier Seiten gleich dem Rechteck aus der kleinern und der dritten Seite ist, so verhalten sich die Winkel an letzterer wie 1 : 2.

Voraussetzung: $c^2 - b^2 = ab$; **Behauptung**: $\gamma = 2\,\beta$.

Beweis: Man legt an BC in C Winkel β an, dessen 2. Schenkel AB in T trifft, und fällt die Senkrechte CH. Dann erhält man nach dem allgemeinen Pythagoras für die Dreiecke BCT und ACT:

$$a^2 = 2\,t^2 + 2\,pt \text{ und}$$

$$b^2 = t^2 + (c - t)^2 - 2\,(c - t)\,p = 2\,t^2 + c^2 - 2\,ct - 2\,cp + 2\,pt.$$

Durch Subtraction ergiebt sich: $a^2 - b^2 = -c^2 + 2\,ct + 2\,cp$,

$$\text{also } p = \frac{a^2 - b^2 + c^2 - 2\,ct}{2\,c}.$$

Man setzt diesen Werth von p in die 1. Gleichung, dann folgt:

$$a^2 = 2\,t^2 + \frac{a^2 - b^2 + c^2 - 2\,ct}{c}\,.\,t$$

$$\text{oder } a^2\,c = 2\,ct^2 + a^2\,t - b^2\,t + c^2\,t - 2\,ct^2,$$

$$\text{mithin } t = \frac{a^2\,c}{a^2 + c^2 - b^2}.$$

Nach der Voraussetzung war: $ab = c^2 - b^2$, also

$$t = \frac{a^2\,c}{a^2 + ab} = \frac{ac}{a + b}.$$

Verwandelt man diese Gleichung in eine Proportion, so ergiebt sich: $a + b : a = c : t$

oder $a : b = t : c - t$

Diese Proportion gilt jedoch nur, wenn CT den Winkel C halbirt, folglich auch $\angle\,TCA = \beta$

w. z. b. w.

d.) Wenn in einem Dreieck die Differenz der Quadrate zweier Seiten gleich dem Rechteck aus der größern und der 3. Seite ist, so verhalten sich die Supplemente der Winkel an letzterer wie 1 : 2.

Voraussetzung: $b^2 - c^2 = ab$; **Behauptung**: $(2\,R - \gamma) = 2\,(2\,R - \beta)$.

Beweis: (Fig. VII.) Man macht CD = CA, verbindet A mit D und fällt das Loth AH. Dann erhält man nach dem allgemeinen Pythagoras für die Dreiecke ABC und ACD:

$$b^2 = a^2 + c^2 + 2\,ap \text{ und}$$

$$b^2 = b^2 + AD^2 - 2\,b\,(b - a - p);$$

$$\text{folglich } p = \frac{b^2 - a^2 - c^2}{2\,a} = \frac{2\,b^2 - 2\,ab - AD^2}{2\,b}.$$

Nun ist n. d. Voraussetzung $b^2 - c^2 = ab$, somit

$$\frac{ab - a^2}{2\,a} = \frac{2\,b^2 - 2\,ab - AD^2}{2\,b}$$

oder $b^2 - ab = 2\,b^2 - 2\,ab - AD^2$,

also $b^2 - ab = AD^2 = c^2$

d. h. $AD = c$.

Das Dreieck ABD ist daher ein gleichschenkliges, folglich $\measuredangle\, ABD = \measuredangle\, D = \frac{1}{2}\,(2\,R - \gamma) = (2\,R - \beta)$ w. z. b. w.

Folgerung. Aus den beiden letzten Sätzen geht hervor, daß z. B. **die Dreiecke Trisectionsdreiecke sind, in welchen die Seiten sich wie 2 : 3 : 4 oder wie 4 : 5 : 6 verhalten.** Denn

$$4^2 - 2^2 = 4\,.\,3 \text{ und } 6^2 - 4^2 = 4\,.\,5.$$

3. Im Trisectionsdreieck ist die Projection der Seite b auf a entweder gleich der halben Differenz oder der halben Summe der genannten Seiten.

Beweis: Ist $\gamma = 2\,\beta$, so ergiebt sich nach dem allg. Pyth.

$c^2 = b^2 + a^2 \pm 2\,ap$, wenn p die Projection von b auf a ist;

$$\text{folglich } p = \pm\frac{c^2 - b^2 - a^2}{2\,a} = \pm\frac{ab - a^2}{2\,a} = \pm\frac{b - a}{2}.$$

Ist dagegen $2\,R - \gamma = 2\,(2\,R - \beta)$, so erhält man:

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2\,ap, \text{ also } p = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} = \frac{a^2 + ab}{2\,a} = \frac{a + b}{2}$$

Umkehrung: Das Dreieck ABC ist ein Trisectionsdreieck: 1.) wenn γ stumpf und die Projection von b auf $a = -\frac{a - b}{2}$ ist, 2.) wenn γ spitz und die Projection von b auf $a = \frac{a - b}{2}$ ist, 3.) wenn β stumpf und die Projection von b auf $a = \frac{a + b}{2}$ ist.

Beweis: Nach dem allg. Pyth. ist in jedem Dreieck

$$c^2 = a^2 + b^2 \pm 2\,ap.$$

Setzt man $p = \mp\frac{a - b}{2}$, so folgt für Fall I. u. II.

$$c^2 = a^2 + b^2 - a^2 + ab = ab - b^2$$

d. h. $\gamma = 2\,\beta$.

Setzt man $p = \frac{a + b}{2}$, so erhält man

$$c^2 = a^2 + b^2 - a^2 - ab = b^2 - ab$$

d. h. $(2\,R - \gamma) = 2\,(2\,R - \beta)$.

Der letzte Satz giebt einen einfachen Weg an, ein Trisectionsdreieck zu zeichnen, wenn 2 Seiten desselben gegeben sind. Man zeichnet nämlich eine Seite hin, schlägt von einem Endpunkte aus die halbe Summe oder Differenz beider Seiten darauf (resp. auf die Verlängerung derselben) ab und hat so den Fußpunkt der Höhe gefunden.

4. Im Trisectionsdreieck ist $\cos\beta = \pm\frac{c}{2\,b}$.

Beweis: Ist $\gamma = 2\,\beta$, so verhält sich $b : c = \sin\beta : \sin 2\,\beta = \sin\beta : 2\,\sin\beta\,\cos\beta = 1 : 2\,\cos\beta$; folglich $\cos\beta = \frac{c}{2\,b}$.

Ist $(2\,R - \gamma) = 2\,(2\,R - \beta)$, so ergiebt sich
$b : c = \sin(2\,R - \beta) : \sin 2\,(2\,R - \beta) = \sin(2\,R - \beta) : 2 \sin(2\,R - \beta) \cos 2\,R - \beta$

$$= 1 : 2 \cos(2\,R - \beta) = 1 : -2 \cos\beta;\ \text{mithin}\ \cos\beta = \frac{-c}{2\,b}.$$

§. 6. Geometrischer Ort des Punktes A im Trisectionsdreieck.

1. **Aufgabe:** Es soll der geometrische Ort für die Spitzen aller Dreiecke gefunden werden, wenn ein Winkel an der (festliegenden) Grundlinie doppelt so groß ist als der andere.

Lösung: Es sei im Dreieck ABC (Fig. VIII.) BC fest, Punkt A beweglich, $\measuredangle\,\gamma = 2\,\beta$ und $BO = \frac{1}{3}\,BC$. Nimmt man weiter O zum Anfange eines rechtwinkligen Coordinatensystems und OC als x-Axe, so erhält man, wenn $(x\ \ y)$ die Coordinaten des Punktes A sind, die beiden Gleichungen

$$(1)\ \tan\beta = \frac{y}{\frac{a}{3} + x}\ \text{und}\ (2)\ \tan 2\,\beta = \frac{y}{\frac{2}{3}\,a - x}.$$

Nun ist $\tan 2\,\beta = \frac{2 \tan\beta}{1 - \tan^2\beta}$, folglich ergiebt sich, wenn man $\tan\beta$ eliminirt:

$$\frac{y}{\frac{2}{3}\,a - x} = \frac{\frac{2\,y}{\frac{a}{3} + x}}{1 - \left(\frac{y}{\frac{a}{3} + x}\right)^2} = \frac{2\,y\left(\frac{a}{3} + x\right)}{\left(\frac{a}{3} + x\right)^2 - y^2}$$

Man dividirt ferner durch y und beseitigt die Nenner, dann erhält man:

$$\frac{a^2}{9} + \tfrac{2}{3}\,ax + x^2 - y^2 = \frac{4}{9}a^2 + \tfrac{4}{3}\,ax - \tfrac{2}{3}\,ax - 2\,x^2,$$

$$\text{folglich}\ 3\,x^2 - y^2 = \frac{a^2}{3}\ \text{oder}\ \frac{9\,x^2}{a^2} - \frac{3\,y^2}{a^2} = 1.$$

d. h. **der geometrische Ort des Punktes A ist eine Hyperbel, deren Hauptaxe $\frac{2}{3}$ a und deren Excentricität $\frac{4}{3}$ a beträgt,** oder da die Länge von a ganz willkürlich ist: **der geometrische Ort ist eine Hyperbel, deren Excentricität doppelt so groß ist als die Hauptaxe.**

2. Um die Lage der Asymptoten zu bestimmen, sei $y = Ax$ die Gleichung einer durch den Coordinatenanfang gelegten Linie, dann gelten für einen Durchschnittspunkt der Hyperbel $(x_1\ \ y_1)$ die beiden Gleichungen:

$$(1)\ y_1 = Ax_1 \qquad (2)\ 9x_1{}^2 - 3\,y_1{}^2 = a^2.$$

Eliminirt man y_1, so ergiebt sich

$$9\,x_1{}^2 - 3\,A^2\,x_1{}^2 = a^2,\ \text{also}\ x_1 = \pm\frac{a}{\sqrt{9 - 3\,A^2}}$$

Soll nun die angenommene Linie Asymptote werden, so muß $x_1 = \infty$, also

$$\sqrt{9 - 3\,A^2} = o\ \text{sein. Hieraus folgt}$$

$$A = \sqrt{3} = \tan 60^0$$

Mithin sind die Asymptoten unter Winkeln von 60^0 und 120^0 gegen die positive Richtung der x-Axe geneigt.

Die Asymptoten-Gleichung der Hyperbel findet man dann auf folgende Weise.

Man nimmt die Asymptoten zu Axen eines neuen Systems $(\xi\ \ \eta)$, dann ist für einen Punkt der Hyperbel $(x_1\ \ y_1)$

$$(1)\ x_1 = \xi \cos 60^0 + \eta \cos 60^0 = \tfrac{1}{2}\,(\xi + \eta)\ \text{und}$$
$$(2)\ y_1 = \xi \sin 60^0 - \eta \sin 60^0 = \tfrac{1}{2}\,\sqrt{3}\,(\xi - \eta)$$

Eliminirt man x_1 und y_1 aus der Gleichung $9x_1^2 - 3y_1^2 = a^2$, so ergiebt sich:

$$\frac{9}{4}\left(\xi^2 + 2\xi\eta + \eta^2\right) - \frac{9}{4}\left(\xi^2 - 2\xi\eta + \eta^2\right) = a^2,$$

folglich ist $\xi\eta = \frac{a^2}{9}$ die gesuchte **Asymptoten-Gleichung.**

3. Um die Größe der Radienvectoren nach einem Punkte $(x_1\ y_1)$ der Hyperbel zu bestimmen, hat man die Gleichungen:

$$r_1 = \sqrt{y_1^2 + (\tfrac{2}{3}a - x_1)^2} \text{ und } r_2 = \sqrt{y_1^2 + (\tfrac{2}{3}a + x_1)^2}$$

Man eliminirt y_1 mit Hilfe der Gleichung $9x_1^2 - 3y_1^2 = a^2$, dann findet man

$$r_1 = \sqrt{3x_1^2 - \frac{a^2}{3} + \frac{4}{9}a^2 - \tfrac{4}{3}ax_1 + x_1^2} = \sqrt{4x_1^2 - \tfrac{4}{3}ax_1 + \frac{a^2}{9}} = 2x_1 - \frac{a}{3}$$

$$\text{und } r_2 = \sqrt{3x_1^2 - \frac{a^2}{3} + \frac{4}{9}a^2 + \tfrac{4}{3}ax_1 + x_1^2} = \sqrt{4x_1^2 + \tfrac{4}{3}ax_1 + \frac{a^2}{9}} = 2x_1 + \frac{a}{3}$$

Ist nun φ der Winkel, welchen der Radiusvector r_1 mit der pos. Richtung der x-Axe bildet, so hat man zur Bestimmung der Polargleichung die beiden Beziehungen:

$$(1)\ r_1 \cos\varphi = x_1 - \tfrac{2}{3}a \text{ und } (2)\ r_1 = 2x_1 - \tfrac{a}{3},$$

woraus x_1 zu eliminiren ist. Man erhält dann $r_1 = 2r_1\cos\varphi + \frac{4}{3}a - \frac{a}{3}$; also ist

$$r = \frac{a}{1 - 2\cos\varphi} \text{ die **Polargleichung** der Hyperbel.}$$

4. Verlegt man endlich das rechtwinklige Coordinatensystem parallel zu sich mit dem Anfange nach dem Scheitel der Hyperbel und bezeichnet die Coordinaten des neuen Systems mit x^1 und y^1 dann ist $x = x^1 + \frac{a}{3}$ und $y = y^1$. Setzt man diese Werthe in die Gleichung der Hyperbel: $9x^2 - 3y^2 = a^2$ ein, so ergiebt sich:

$$9x^{1\,2} + 6x^1 a + a^2 - 3y^{1\,2} = a^2,$$

folglich $y^2 = 2ax + 3x^2$ die **Scheitelgleichung** der Hyperbel.

§. 7. Besondere Eigenschaften der Hyperbel $9x^2 - 3y^2 = a^2$.

1. Man verbindet einen Hyperbelpunkt A mit dem Brennpunkt C des zugehörigen und mit dem Scheitel B des andern Zweiges.

Es soll untersucht werden, in welcher Beziehung die Winkel stehen, welche die erwähnten Linien mit der Hauptaxe bilden.

Lösung: Sind $x_1\ y_1$ die Coordinaten des angenommenen Hyperbelpunktes, so ist

$$\tan\beta = \frac{y_1}{x_1 + \frac{a}{3}}$$

Nun ist $y_1 = r_1 \sin\varphi_1$ und $x_1 = \frac{2}{3}a + r_1\cos\varphi_1$,

$$\text{folglich } \tan\beta = \frac{r_1\sin\varphi_1}{a + r_1\cos\varphi_1}$$

Nach der Polargleichung der Hyperbel ist $r_1 = \frac{a}{1 - 2\cos\varphi_1}$. Substituirt man diesen Werth von r_1 in die obige Gleichung, so erhält man:

$$\tan\beta = \frac{a\sin\varphi_1}{a - 2a\cos\varphi_1 + a\cos\varphi_1} = \frac{\sin\varphi_1}{1 - \cos\varphi_1}$$

$$= \frac{2 \cdot \sin \frac{\varphi_1}{2} \cdot \cos \frac{\varphi_1}{2}}{2 \sin^2 \frac{\varphi_1}{2}} = \cot \frac{\varphi_1}{2} = \tan \left(R - \frac{\varphi_1}{2}\right)$$

folglich $\beta = R - \frac{\varphi_1}{2}$ oder $2\beta = 2R - \varphi_1 = \gamma$,

d. h. verbindet man einen Hyperbelpunkt A mit dem zugehörigen Brennpunkt C und mit dem Scheitel B des andern Zweiges, so ist im Dreieck ABC $\measuredangle \gamma = 2\beta$.

2. Man verbindet einen Hyperbelpunkt A mit dem Scheitel B des zugehörigen und mit dem Brennpunkt C des andern Zweiges.

Es soll untersucht werden, in welcher Beziehung die Supplemente der Dreieckswinkel B und C zu einander stehen.

Lösung: Sind $-x_1$ y_1 die Coordinaten des Hyperbelpunktes A, so erhält man die Gleichung:

$$\tan \beta = \frac{y_1}{-x_1 + \frac{a}{3}}, \text{ folglich } \tan(2R - \beta) = \frac{y_1}{x_1 - \frac{a}{3}}$$

$$\text{und } \tan 2(2R - \beta) = \frac{2y_1\left(x_1 - \frac{a}{3}\right)}{\left(x_1 - \frac{a}{3}\right)^2 - y_1^2}$$

Da nun $y_1^2 = 3x_1^2 - \frac{a^2}{3}$ ist, so folgt

$$\tan 2(2R - \beta) = \frac{2y_1\left(x_1 - \frac{a}{3}\right)}{x_1^2 - \frac{2}{3}ax_1 + \frac{a^2}{9} - 3x_1^2 + \frac{a^2}{3}} = \frac{-y_1\left(x_1 - \frac{a}{3}\right)}{x_1^2 + \frac{ax_1}{3} - \frac{2}{9}a^2}$$

$$= \frac{-y_1\left(x_1 - \frac{a}{3}\right)}{\left(x_1 - \frac{a}{3}\right)\left(x_1 + \frac{2}{3}a\right)} = \frac{-y_1}{x_1 + \frac{2}{3}a}$$

Ferner ist $\tan \varphi_1 = \frac{-y_1}{x_1 + \frac{2}{3}a}$, folglich $\tan \varphi_1 = \tan 2(2R - \beta)$, also $\varphi_1 = 2(2R - \beta)$

d. h. verbindet man einen Hyperbelpunkt A mit dem zugehörigen Scheitel B und mit dem Brennpunkt C des andern Zweiges, so ist im Dreieck ABC das Supplement von γ doppelt so groß als das Supplement von β.

Folgerung: Die Hyperbel $9x^2 - 3y^2 = a^2$ ist nicht nur der geometrische Ort für die Spitzen aller Dreiecke, in welchen die Winkel an der Grundlinie sich wie 1 : 2 verhalten, sondern auch für die Spitzen der Dreiecke, in welchen die Supplemente der Basiswinkel in demselben Verhältniß stehen.

3. Man verbindet einen Hyperbelpunkt A mit dem Brennpunkt C des zugehörigen und mit dem Scheitel B des andern Zweiges und zieht durch A eine Parallele AT zur benachbarten Asymptote.

Es wird gefragt: „In welchem Verhältniß theilt die Parallele zur Asymptote den Winkel A?“

Lösung: (unabhängig von § 7, 1) Da AT parallel der Asymptote ist, so ist $\measuredangle ATC = \frac{2}{3}R$. Bezeichnet man nun die Winkel BAT u. CAT entsprechend mit ϑ und ω, so erhält man

$$\vartheta = \tfrac{2}{3}R - \beta \text{ und } \omega = \varphi_1 - \tfrac{2}{3}R; \text{ folglich}$$

$$(1)\ \tan \vartheta = \tan\left(\tfrac{2}{3}R - \beta\right) = \frac{\sqrt{3} - \tan \beta}{1 + \sqrt{3}\tan \beta} \text{ und}$$

$$(2)\ \tan \omega = \tan\left(\varphi_1 - \tfrac{2}{3}R\right) = \frac{\tan \varphi_1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}\tan \varphi_1}$$

$$= \frac{\frac{2 \tan \frac{\varphi_1}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\varphi_1}{2}} - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}\,\frac{2 \tan \frac{\varphi_1}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\varphi_1}{2}}} = \frac{2 \tan \frac{\varphi_1}{2} - \sqrt{3} + \sqrt{3} \tan^2 \frac{\varphi_1}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\varphi_1}{2} + 2 . \sqrt{3} . \tan \frac{\varphi_1}{2}}$$

Sind nun weiter x_1 y_1 die Coordinaten des Punktes A, so findet man:

$$\tan \beta = \frac{y_1}{x_1 + \frac{a}{3}} = \frac{r_1 \sin \varphi_1}{a + r_1 \cos \varphi_1}\ .$$

da $y_1 = r_1 \sin \varphi_1$ $\quad x_1 = \frac{2}{3} a + r \cos \varphi_1$ ist.

Ferner ist nach der Polargleichung der Hyperbel $r_1 = \frac{a}{1 - 2 . \cos \varphi_1}$, folglich ergiebt sich durch Elimination von r_1

$$\tan \beta = \frac{a . \sin \varphi_1}{a - 2 a \cos \varphi_1 + a \operatorname{sos} \varphi_1} = \frac{\sin \varphi_1}{1 - \cos \varphi_1}$$

$$= \frac{2 . \sin \frac{\varphi_1}{2} . \cos \frac{\varphi_1}{2}}{2 . \sin^2 \frac{\varphi_1}{2}} = \frac{1}{\tan \frac{\varphi_1}{2}}$$

Durch Einführung dieses Werthes von $\tan \beta$ in die obige Gleichung (1) erhält man weiter:

$$\tan \vartheta = \frac{\sqrt{3} . \tan \frac{\varphi_1}{2} - 1}{\tan \frac{\varphi_1}{2} + \sqrt{3}};$$

somit $\tan 2 \vartheta = \frac{2 \tan \vartheta}{1 - \tan^2 \vartheta} = \frac{2 \left(\sqrt{3} \tan \frac{\varphi_1}{2} - 1\right)\left(\tan \frac{\varphi_1}{2} + \sqrt{3}\right)}{\left(\tan \frac{\varphi_1}{2} + \sqrt{3}\right)^2 - \left(\sqrt{3} \tan \frac{\varphi_1}{2} - 1\right)^2} =$

$$\frac{2 \sqrt{3} \tan^2 \frac{\varphi_1}{2} - 2 \tan \frac{\varphi_1}{2} + 6 \tan \frac{\varphi_1}{2} - 2 \sqrt{3}}{\tan^2 \frac{\varphi_1}{2} + 2 \sqrt{3} \tan \frac{\varphi_1}{2} + 3 - 3 \tan^2 \frac{\varphi_1}{2} + 2 \sqrt{3} \tan \frac{\varphi_1}{2} - 1}$$

$$= \frac{\sqrt{3} \tan^2 \frac{\varphi_1}{2} + 2 \tan \frac{\varphi_1}{2} - \sqrt{3}}{1 + 2 \sqrt{3} \tan \frac{\varphi_1}{2} - \tan^2 \frac{\varphi_1}{2}}$$

Hieraus folgt

$$\tan \omega = \tan 2 \vartheta, \text{ also } \omega = 2 \vartheta.$$

d. h. wenn man einen Punkt der Hyperbel $9 x^2 - 3 y^2 = a^2$ mit dem zugehörigen Brennpunkte C und dem Scheitel B des andern Zweiges verbindet und durch A eine Parallele zur benachbarten Asymptote zieht, so theilt diese Parallele den von der Brennlinie und Scheitellinie gebildeten Winkel in dem Verhältniß von 2 : 1.

4. In gleicher Weise kann man auch folgenden Satz nachweisen:

Wenn man einen Punkt A der Hyperbel $9 x^2 - 3 y^2 = a^2$ mit dem zugehörigen Scheitel B und mit dem Brennpunkte C des andern Zweiges verbindet, und durch Punkt A eine Parallele zur benachbarten Asymptote zieht, so theilt diese Parallele den von der Brennlinie und von der Scheitellinie gebildeten Winkel in dem Verhältniß von 2 : 1.

§. 8. Die Hyperbel und der dem Trisectionsdreieck umschriebene Kreis.

1. Aufgabe. Es sollen die Durchschnittspunkte bestimmt werden, in welchen ein durch den Scheitel B und den Brennpunkt C der Hyperbel $9\,x^2 - 3\,y^2 = a^2$ gehender Kreis (der dem Dreieck ABC umschriebene Kreis) die Hyperbel trifft.

Lösung. (Fig. XIII.) Der Mittelpunkt M des Kreises liegt senkrecht über der Mitte von BC, folglich ist die Mittelpunkts-Abscisse $= \frac{a}{6}$, wenn man den Mittelpunkt der Hyperbel als Coordinaten-Anfang nimmt. Die Ordonate des Mittelpunkts ist $r \cos \alpha$, wenn r der Radius des angenommenen Kreises ist. Zwischen r, a und α besteht noch die Beziehung

$$a = 2\,r \sin \alpha.$$

Man erhält nun als Gleichung des Kreises

$$(y - r \cos \alpha)^2 + (x - \tfrac{r}{3} \sin \alpha)^2 = r^2$$

Für einen Durchschnittspunkt $x\ y$ des Kreises und der Hyperbel gelten dann die Gleichungen

$$(1)\quad (y^1 - r \cos \alpha)^2 + (x^1 - \tfrac{r}{3} \sin \alpha)^2 = r^2$$

$$\text{und } (2)\quad 9\,x^{1\,2} - 3\,y^{1\,2} = a^2 = 4\,r^2 \sin^2 \alpha$$

Aus der 2. Gleichung erhält man

$$x^1 = \pm \tfrac{1}{3} \sqrt{3\,y^{1\,2} + 4\,r^2 \sin^2 \alpha},$$

folglich ist

$$\left(\pm \tfrac{1}{3} \sqrt{3\,y^{1\,2} + 4\,r^2 \sin^2 \alpha} - \tfrac{r}{3} \sin \alpha\right)^2 + \left(y^1 - r \cos \alpha\right)^2 = r^2.$$

Weiter

$$\tfrac{1}{3}\,y^{1\,2} + \tfrac{4}{9}\,r^2 \sin^2 \alpha \mp \tfrac{2}{9}\,r \sin \alpha \sqrt{3\,y^{1\,2} + 4\,r^2 \sin^2 \alpha} + \tfrac{1}{9}\,r^2 \sin^2 \alpha + y^{1\,2}$$
$$- 2\,r\,y^1 \cos \alpha + r^2 \cos^2 \alpha = r^2.$$

Durch Transformation und Vereinfachung ergiebt sich ferner

$$\mp \tfrac{2}{9}\,r \sin \alpha \sqrt{3\,y^{1\,2} + 4\,r^2 \sin^2 \alpha} = - \tfrac{4}{3}\,y^{1\,2} + 2\,r\,y^1 \cos \alpha + \tfrac{4}{9}\,r^2 \sin^2 \alpha.$$

Erhebt man beide Seiten ins Quadrat, so folgt

$$\tfrac{4}{27}\,r^2\,y^{1\,2} \sin^2 \alpha + \tfrac{16}{81}\,r^4 \sin^4 \alpha = \tfrac{16}{9}\,y^{1\,4} - \tfrac{16}{3}\,r\,y^{1\,3} \cos \alpha - \tfrac{32}{27}\,r^2\,y^{1\,2} \sin^2 \alpha$$
$$+ 4\,r^2\,y^{1\,2} \cos^2 \alpha + \tfrac{16}{9}\,r^3\,y^1 \cos \alpha \sin^2 \alpha + \tfrac{16}{81}\,r^4 \sin^4 \alpha.$$

Durch weitere Vereinfachung erhält man

$$4\,y^{1\,4} - 12\,r\,y^{1\,3} \cos \alpha + 3\,r^2\,y^{1\,2}\,(3 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + 4\,r^3\,y^1 \sin^2 \alpha \cos \alpha = 0.$$

Eine Wurzel der Gleichung ist daher $= 0$ und diesem Werthe $y_0 = 0$ entspricht $x_0 = -\frac{a}{3}$

Es sind dies die Coordinaten des Punktes B.

Dividirt man die vorige Gleichung durch $(y^1 - 0)$, so erhält sie die Form

$$4\,y^{1\,3} - 12\,r\,y^{1\,2} \cos \alpha + 3\,r^2\,y^1\,(3 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + 4\,r^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha = 0$$

oder

$$y^{1\,3} - 3\,r\,y^{1\,2} \cos \alpha + \tfrac{3}{4}\,r^2\,y^1\,(3 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + r^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha = 0.$$

Um das 2. Glied dieser Gleichung, welches die Unbekannte in der 2. Potenz enthält, zu beseitigen, setzt man

$$y^1 = z + r \cos \alpha, \text{ dann ergiebt sich}$$

$$y^{1\,3} = z^3 + 3\,r\,z^2 \cos \alpha + 3\,r^2\,z \cos^2 \alpha + r^3 \cos^3 \alpha$$

$$- 3\,r\,y^{1\,2} \cos \alpha = - 3\,r\,z^2 \cos \alpha - 6\,r^2\,z \cos^2 \alpha - 3\,r^3 \cos^3 \alpha$$

$$+ \tfrac{3}{4}\,r^2\,y^1\,(3 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = + \begin{cases} \tfrac{9}{4}\,r^2\,z \cos^2 \alpha \\ - \tfrac{3}{4}\,r^2\,z \sin^2 \alpha \end{cases} = + \begin{cases} \tfrac{9}{4}\,r^3 \cos^3 \alpha \\ - \tfrac{3}{4}\,r^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha \end{cases}$$

$$+ r^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha = + r^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha$$

$$o = z^3 \qquad - \tfrac{3}{4} r^2 z \qquad + \tfrac{1}{4} r^3 \cos \alpha.$$

Nun ist $\cos^3 \frac{\alpha}{3} - \frac{3}{4} \cos \frac{\alpha}{3} - \frac{1}{4} \cos \alpha = o.$

Multiplicirt man die letzte Gleichung mit r^3, so lautet sie:

$$\left(r \cos \frac{\alpha}{3}\right)^3 - \frac{3}{4} r^2 \left(r \cos \frac{\alpha}{3}\right) - \frac{1}{4} r^3 \cos \alpha = o.$$

Addirt man diese Gleichung zu der obigen, so folgt

$$z^3 + \left(r \cos \frac{\alpha}{3}\right)^3 - \frac{3}{4} r^2 \left(z + r \cos \frac{\alpha}{3}\right) = o$$

oder $\left(z + r \cos \frac{\alpha}{3}\right) \left\{z^2 - z\, r \cos \frac{\alpha}{3} + r^2 \cos^2 \frac{\alpha}{3} - \frac{3}{4} r^2\right\} = o.$

Es geht hieraus hervor, daß $z_1 = - r \cos \frac{\alpha}{3}$ eine Wurzel der obigen Gleichung ist.

Zur Bestimmung von z_2 und z_3 dient die Gleichung

$$z^2 - z \,.\, r \cos \frac{\alpha}{3} + r^2 \cos^2 \frac{\alpha}{3} - \frac{3}{4} r^2 = o.$$

Man findet weiter

$$z^2 - r\, z \cos \frac{\alpha}{3} + \frac{r^2}{4} \cos^2 \frac{\alpha}{3} = \frac{3}{4} r^2 - \frac{3}{4} r^2 \cos^2 \frac{\alpha}{3} = \frac{3}{4} r^2 \sin^2 \frac{\alpha}{3},$$

folglich $z = \frac{r}{2} \cos \frac{\alpha}{3} \pm \frac{r}{2} \sqrt{3} \sin \frac{\alpha}{3}$

$$= r \left\{\cos 60^0 \cos \frac{\alpha}{3} \pm \sin 60^0 \sin \frac{\alpha}{3}\right\}$$

$= r \cos \left(60^0 \mp \frac{\alpha}{3}\right)$, also $z_2 = r \cos \left(60^0 - \frac{\alpha}{3}\right)$

$$z_3 = r \cos \left(60^0 + \frac{\alpha}{3}\right).$$

Für y^1 ergeben sich somit folgende Werthe:

$$y_1 = - r \cos \frac{\alpha}{3} + r \cos \alpha = - 2 r \,.\, \sin \tfrac{2}{3} \alpha \,.\, \sin \frac{\alpha}{3}$$

$$y_2 = r \cos \left(60^0 - \frac{\alpha}{3}\right) + r \cos \alpha = 2 r \,.\, \cos \left(30^0 + \frac{\alpha}{3}\right) \cos \left(30^0 - \tfrac{2}{3} \alpha\right)$$

$$y_3 = r \cos \left(60^0 + \frac{\alpha}{3}\right) + r \cos \alpha = 2 r \cos \left(30^0 + \tfrac{2}{3} \alpha\right) \cos \left(30^0 - \frac{\alpha}{3}\right).$$

Um x_1, x_2 und x_3 zu bestimmen, setzt man die für y^1 gefundenen Werthe in die Gleichungen (1) und (2) ein und untersucht, welcher von den sich ergebenden Werthen von x^1 beiden Gleichungen genügt.

Man erhält, wenn man $y_1 = - 2 r \sin \frac{2}{3} \alpha \sin \frac{\alpha}{3}$ in die Gleichung $x_1 = \pm \frac{1}{3} \sqrt{3 y_1^2 + 4 r^2 \sin^2 \alpha}$ einsetzt, und beachtet, daß $\sin \alpha = 3 \sin \frac{\alpha}{3} - 4 \sin^3 \frac{\alpha}{3}$ ist,

$$x_1 = \pm \tfrac{1}{3} \sqrt{12 r^2 \sin^2 \tfrac{2}{3} \alpha \sin^2 \frac{\alpha}{3} + 36 r^2 \sin^2 \frac{\alpha}{3} - 96 r^2 \sin^4 \frac{\alpha}{3} + 64 r^2 \sin^6 \frac{\alpha}{3}}$$

$$= \pm \tfrac{2}{3} r \sin \frac{\alpha}{3} \sqrt{12 \sin^2 \frac{\alpha}{3} \cos^2 \frac{\alpha}{3} + 9 - 24 \sin^2 \frac{\alpha}{3} + 16 \sin^4 \frac{\alpha}{3}}$$

$$= \pm \tfrac{2}{3} r \sin \frac{\alpha}{3} \sqrt{12 \sin^2 \frac{\alpha}{3} - 12 \sin^4 \frac{\alpha}{3} + 9 - 24 \sin^2 \frac{\alpha}{3} + 16 \sin^4 \frac{\alpha}{3}}$$

$$= \pm \tfrac{2}{3} r \sin \frac{\alpha}{3} \sqrt{9 - 12 \sin^2 \frac{\alpha}{3} + 4 \sin^4 \frac{\alpha}{3}}$$

$$= \pm \tfrac{2}{3} r \sin \frac{\alpha}{3} \left(3 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{3}\right)$$

Setzt man dagegen $y_1 = - r \cos \frac{\alpha}{3} + r \cos \alpha$ in die Gleichung $(x^1 - \frac{r}{3} \sin \alpha)^2 + (y^1 - r \cos \alpha)^2 = r^2$ ein, so ergiebt sich

$$(x_1 - \frac{r}{3} \sin \alpha)^2 + r^2 \cos^2 \frac{\alpha}{3} = r^2,$$

folglich $x_1 = \frac{r}{3} \sin \alpha \pm r \sin \frac{\alpha}{3} = \frac{r}{3} (3 \sin \frac{\alpha}{3} - 4 \sin^3 \frac{\alpha}{3} \pm 3 \sin \frac{\alpha}{3})$

$$= \frac{2}{3} r \sin \frac{\alpha}{3} \begin{Bmatrix} 3 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{3} \\ - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{3} \end{Bmatrix}$$

mithin $x_1 = \frac{2}{3} r \sin \frac{\alpha}{3} (3 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{3}) = \frac{r}{3} \sin \alpha + r . \sin \frac{\alpha}{3}.$

In analoger Weise ist

$$x_2 = \pm \frac{1}{3} \sqrt{3 y_2^2 + 4 r^2 \sin^2 \alpha}$$

$$= \pm \frac{1}{3} \sqrt{12 r^2 \cos^2 (30^0 + \frac{\alpha}{3}) \cos^2 (30^0 - \frac{2}{3} \alpha) + 4 r^2 \sin^2 \alpha}.$$

Nun ist $\cos (30^0 - \frac{2}{3} \alpha) = \sin (60^0 + \frac{2}{3} \alpha) = 2 \sin (30^0 + \frac{\alpha}{3}) \cos (30^0 + \frac{\alpha}{3})$ und

$\sin \alpha = - \cos (R + \alpha) = - \cos 3 (30^0 + \frac{\alpha}{3}) = 3 \cos (30^0 + \frac{\alpha}{3}) - 4 \cos^3 (30^0 + \frac{\alpha}{3})$

Mit Berücksichtigung dieser Werthe erhält man

$$x_2 = + \frac{2}{3} r \sqrt{3 \cos^2 (30^0 + \frac{\alpha}{3})\, 4 \sin^2 (30^0 + \frac{\alpha}{3}) \cos^2 (30^0 + \frac{\alpha}{3}) + 9 \cos^2 (30^0 + \frac{\alpha}{3}) - 24 \cos^4 (30^0 + \frac{\alpha}{3}) + 16 \cos^6 (30^0 + \frac{\alpha}{3})}$$

$$= \pm \frac{2}{3} r \cos (30^0 + \frac{\alpha}{3}) \sqrt{12 \cos^2 (30^0 + \frac{\alpha}{3}) \left\{ \sin^2 (30^0 + \frac{\alpha}{3}) - 1 \right\} + 9 - 12 \cos^2 (30^0 + \frac{\alpha}{3}) + 16 \cos^4 (30^0 + \frac{\alpha}{3})}$$

$$= \pm \frac{2}{3} r \cos (30^0 + \frac{\alpha}{3}) \sqrt{9 - 12 \cos^2 (30^0 + \frac{\alpha}{3}) + 4 \cos^4 (30^0 + \frac{\alpha}{3})}$$

$$= \pm \frac{2}{3} r \cos (30^0 + \frac{\alpha}{3}) \left\{ 3 - 2 \cos^2 (30^0 + \frac{\alpha}{3}) \right\}$$

Setzt man den Werth von y_2 in die andere Gleichung ein, so findet man

$$x_2 = \frac{r}{3} \sin \alpha \pm r . \sin (60^0 - \frac{\alpha}{3}) = - \frac{r}{3} \cos (R + \alpha) \pm r . \sin (60^0 - \frac{\alpha}{3})$$

$$= \frac{r}{3} \left\{ 3 \cos (30^0 + \frac{\alpha}{3}) - 4 \cos^3 (30^0 + \frac{\alpha}{3}) \pm 3 \cos (30^0 + \frac{\alpha}{3}) \right\}$$

$$= \frac{2}{3} r \cos (30^0 + \frac{\alpha}{3}) \begin{Bmatrix} 3 - 2 \cos^2 (30^0 + \frac{\alpha}{3}) \\ - 2 \cos^2 (30^0 + \frac{\alpha}{3}) \end{Bmatrix},$$

folglich $x_2 = \frac{2}{3} r \cos (30^0 + \frac{\alpha}{3}) \left\{ 3 - 2 \cos^2 (30^0 + \frac{\alpha}{3}) \right\} = \frac{r}{3} \sin \alpha + r \sin (60^0 - \frac{\alpha}{3})$

Endlich ist $x_3 = \pm \frac{1}{3} \sqrt{3 y_3^2 + 4 r^2 \sin^2 \alpha}$

$$= \pm \frac{1}{3} \sqrt{12 r^2 \cos^2 (30^0 + \frac{2}{3} \alpha) \cos^2 (30^0 - \frac{\alpha}{3}) + 4 r^2 \sin^2 \alpha}$$

Nun ist $\cos (30^0 + \frac{2}{3} \alpha) = \sin (60^0 - \frac{2}{3} \alpha) = 2 \sin (30^0 - \frac{\alpha}{3}) \cos (30^0 - \frac{\alpha}{3})$ und

$\sin \alpha = \cos (R - \alpha) = \cos 3 (30^0 - \frac{\alpha}{3}) = 4 \cos^3 (30^0 - \frac{\alpha}{3}) - 3 \cos (30^0 - \frac{\alpha}{3})$

Substituirt man diese Werthe in die obige Gleichung, so ergiebt sich

$$x_3 = \pm \tfrac{2}{3}\, r \sqrt{12 \sin^2\left(30^0 - \frac{\alpha}{3}\right) \cos^4\left(30^0 - \frac{\alpha}{3}\right) + 16 \cos^6\left(30^0 - \frac{\alpha}{3}\right) - 24 \cos^4\left(30^0 - \frac{\alpha}{3}\right) + 9 \cos^2\left(30^0 - \frac{\alpha}{3}\right)}$$

$$= \pm \tfrac{2}{3}\, r \cos\left(30^0 - \frac{\alpha}{3}\right) \sqrt{12 \cos^2\left(30^0 - \frac{\alpha}{3}\right) \left\{ \sin^2\left(30^0 - \frac{\alpha}{3}\right) - 1 \right\} + 16 \cos^4\left(30^0 - \frac{\alpha}{3}\right) - 12 \cos^2\left(30^0 - \frac{\alpha}{3}\right) + 9}$$

$$= \pm \tfrac{2}{3}\, r \cos\left(30^0 - \frac{\alpha}{3}\right) \sqrt{4 \cos^4\left(30^0 - \frac{\alpha}{3}\right) - 12 \cos\left(30^0 - \frac{\alpha}{3}\right) + 9}$$

$$= \pm \tfrac{2}{3}\, r \cos\left(30^0 - \frac{\alpha}{3}\right) \left\{ 3 - 2 \cos^2\left(30^0 - \frac{\alpha}{3}\right) \right\}$$

Andererseits findet man

$$x_3 = \frac{r}{3} \sin \alpha \pm r \sin\left(60^0 + \frac{\alpha}{3}\right)$$

$$= \frac{r}{3} \cos (R - \alpha) \pm r \sin\left(60^0 + \frac{\alpha}{3}\right)$$

$$= \frac{r}{3} \left\{ 4 \cos^3\left(30^0 - \frac{\alpha}{3}\right) - 3 \cos\left(30^0 - \frac{\alpha}{3}\right) \pm 3 \cos\left(30^0 - \frac{\alpha}{3}\right) \right\}$$

$$x_3 = - \tfrac{2}{3}\, r \cos\left(30^0 - \frac{\alpha}{3}\right) \left\{ \begin{matrix} 3 - 2 \cos^2\left(30^0 - \frac{\alpha}{3}\right) \\ - 2 \cos^2\left(30^0 - \frac{\alpha}{3}\right) \end{matrix} \right\}$$

folglich $x_3 = - \tfrac{2}{3}\, r \cos\left(30^0 - \frac{\alpha}{3}\right) \left\{ 3 - 2 \cos^2\left(30^0 - \frac{\alpha}{3}\right) \right\} = \frac{r}{3} \sin \alpha - r \,.\, \sin\left(60^0 + \frac{\alpha}{3}\right)$.

2. Der Kreis schneidet demnach die Hyperbel außer im Punkte B in drei weitern Punkten, deren Lage näher zu erörtern ist (Fig. XIV.)

$y_1 = - 2\, r \sin \frac{\alpha}{3} \sin \frac{2}{3}\, \alpha$ ist negativ, sowohl für einen spitzen als für einen stumpfen Winkel, während $x_1 = \frac{2}{3}\, r \sin \frac{\alpha}{3} \left\{ 3 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{3} \right\}$ für spitze und stumpfe Winkel positiv ist. Der Punkt A_1 liegt daher auf dem rechten Hyperbelzweige unterhalb der x-Axe.

$y_2 = 2\, r \cos\left(30^0 + \frac{\alpha}{3}\right) \cos\left(30^0 - \frac{2}{3}\, \alpha\right)$ ist für alle Winkel $\alpha < 2\, R$ positiv, desgl. $x_2 = \frac{2}{3}\, r \cos\left(30^0 + \frac{\alpha}{3}\right) \left\{ 3 - 2 \cos^2\left(30^0 + \frac{\alpha}{3}\right) \right\}$

Mithin liegt A_2 auf dem rechten Hyperbelzweige oberhalb der x-Axe.

$y_3 = 2\, r \cos\left(30^0 + \frac{2}{3}\, \alpha\right) \cos\left(30^0 - \frac{\alpha}{3}\right)$ ist positiv, wenn $\alpha < 1\, R$, und negativ, wenn $\alpha > 1\, R$ ist.

$x_3 = - \frac{2}{3}\, r \cos\left(30^0 - \frac{\alpha}{3}\right) \left\{ 3 - 2 \cos^2\left(30^0 - \frac{\alpha}{3}\right) \right\}$ ist dagegen sowohl für spitze als stumpfe Winkel negativ.

Der Punkt A_3 liegt daher auf dem linken Zweige der Hyperbel, und zwar oberhalb der x-Axe, wenn α spitz, unterhalb dagegen, wenn α stumpf ist.

Für den speciellen Fall $\alpha = 1$ R erhält man für x u. y folgende Werthe: $y_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $y_2 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $y_3 = 0$; $x_1 = \frac{5}{6} r$, $x_2 = \frac{5}{6} r$, $x_3 = -\frac{2}{3} r$; d. h. der Kreis schneidet rechts zu beiden Seiten der x-Axe gleiche Hyperbelbogen ab, während der links gelegene Punkt A_3 auf den Scheitel B der Hyperbel fällt.

3. Man fragt nach den Entfernungen der drei Durchschnittspunkte A_1 A_2 und A_3 von einander.

Lösung: $A_1 A_2 = \sqrt{(y_1 - y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2}$

$$= \sqrt{r^2 \left\{ -\cos\frac{\alpha}{3} - \cos\left(60^0 - \frac{\alpha}{3}\right) \right\}^2 + r^2 \left\{ \sin\frac{\alpha}{3} - \sin\left(60^0 - \frac{\alpha}{3}\right) \right\}^2}$$

$$= \sqrt{r^2 . 4 . \cos^2 30^0 \cos^2 \left(30^0 - \frac{\alpha}{3}\right) + r^2\, 4 . \sin^2 \left(30^0 - \frac{\alpha}{3}\right) \cos^2 30^0}$$

$$= 2\, r . \cos 30^0 = r\sqrt{3}.$$

$$A_1 A_3 = \sqrt{r^2 \left\{ -\cos\frac{\alpha}{3} - \cos\left(60^0 + \frac{\alpha}{3}\right) \right\}^2 + r^2 \left\{ \sin\frac{\alpha}{3} + \sin\left(60^0 + \frac{\alpha}{3}\right) \right\}^2}$$

$$= r \sqrt{4 \cos^2 30^0 \cos^2 \left(30^0 + \frac{\alpha}{3}\right) + 4 \sin^2 \left(30^0 + \frac{\alpha}{3}\right) \cos^2 30^0}$$

$$= 2\, r \cos 30^0 = r . \sqrt{3}.$$

$$A_2 A^3 = \sqrt{r^2 . \left\{ \cos\left(60^0 - \frac{\alpha}{3}\right) - \cos\left(60^0 + \frac{\alpha}{3}\right) \right\}^2 + r^2 \left\{ \sin\left(60^0 - \frac{\alpha}{3}\right) + \sin\left(60^0 + \frac{\alpha}{3}\right) \right\}^2}$$

$$= r \sqrt{4 . \sin^2 60^0 \sin^2 \frac{\alpha}{3} + 4 . \sin^2 60^0 \cos^2 \frac{\alpha}{3}}$$

$$= 2\, r . \sin 60^0 = r\sqrt{3}.$$

$r . \sqrt{3}$ ist die Seite des regulären eingeschriebenen Dreiecks; folglich schneidet die Kreisperipherie die Hyperbel außer im Scheitel B in 3 Punkten A_1 A_2 und A_3, welche die Ecken eines regulären Dreiecks bilden.

Da die Lage der Punkte A_1 A_2 und A_3 zu einander von der Größe des Winkels α ganz unabhängig ist, so kann man ganz allgemein den Satz aufstellen:

Wenn man durch den Brennpunkt des einen und durch den Scheitel des andern Zweiges der Hyperbel $9x^2 - 3y^2 = a^2$ einen Kreis mit beliebigem Radius legt, so bilden die drei andern Durchschnittspunkte beider Curven die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks.

4. Verbindet man die Punkte A_1 A_2 und A_3 mit B und C, so erhält man über BC drei Dreiecke, in welchen $\measuredangle BA_2C = \measuredangle BA_3C = \alpha$ und $\measuredangle BA_1C = (2R - \alpha)$ ist. Da nun die Punkte A_1 A_2 und A_3 auf der Hyperbel $9x^2 - 3y^2 = \alpha^2$ liegen, so lassen sich die §. 7, 3 und 4 angegebenen Sätze in Anwendung bringen. Wenn man nämlich einen Punkt A dieser Hyperbel mit dem zugehörigen Brennpunkt und dem Scheitel des andern Zweiges oder mit dem zugehörigen Scheitel und dem Brennpunkt des andern Zweiges verbindet und durch genannten Punkt eine Parallele zur benachbarten Asymptote zieht, so theilt diese Parallele den von der Brennlinie und Scheitellinie gebildeten Winkel in dem Verhältniß von 2 : 1. Construirt man nun für die Punkte A_1 A_2 und A_3 diese Parallelen zu den Asymptoten und verlängert sie, bis sie die Peripherie in den Punkten P_1 P_2 und P_3 treffen, so ist Bogen $BP_1 = \frac{1}{3}$ Bogen BP_1C, Bogen $BP_2 = \frac{1}{3}$ Bogen BP_2C und Bogen $BP_3 = \frac{1}{3}$ Bogen BP_3C. Folglich fallen die Punkte P_2 und P_3 zusammen, während $A_1 P_1 \parallel A_3 P_2$ ist.

Folgerung. Für jeden der 3 Peripheriewinkel A_1 A_2 und A_3 ist eine Trisectionslinie $A_1 P_1$ $A_2 P_2$ und $A_3 P_2$ gefunden.

5. (Fig. XVI.) Um die 2. Trisectionslinie zu bestimmen, wendet man den §. 7, 1 bewiesenen Satz an: „Wenn man einen Punkt A der Hyperbel mit dem zugehörigen Brennpunkt C und mit dem Scheitelpunkt B des andern Zweiges verbindet, so stehen in dem so gebildeten Dreieck die Winkel an der Grundlinie BC in dem Verhältniß von 1 : 2." Mithin $\sphericalangle BCA_1 = 2 . \sphericalangle CBA_1$ und $\sphericalangle BCA_2 = 2 \sphericalangle CBA_2$; also auch Bogen $A_1B = 2$ Bogen A_1C, folglich auch

$$\sphericalangle A_1A_2B = 2 . \sphericalangle A_1A_2C \text{ und}$$
$$\sphericalangle A_1A_3B = 2 \sphericalangle A_1A_3C.$$

Ebenso ist Bogen $A_2B = 2$. Bogen A_2C, folglich auch $\sphericalangle A_2A_1B = 2 . \sphericalangle A_2A_1C$.

Folgerung: Die Sehne A_1A_2 ist die 2. Trisectionslinie der Peripheriewinkel BA_1C und BA_2C zugleich und A_1A_3 ist die 2. Trisectionslinie des Peripheriewinkels BA_3C.

Allgemeine Folgerung: Legt man durch den Scheitel des einen und durch den Brennpunkt des andern Zweiges der Hyperbel $9x^2 - 3y^2 = a^2$ einen Kreis mit beliebigem Radius und verbindet die drei weiteren Durchschnittspunkte beider Curven mit den Endpunkten der Kreissehne, so sind zwei Verbindungslinien dieser Durchschnittspunkte Trisectionslinien der drei auf der Sehne stehenden Peripheriewinkel.

§. 9. Trisection eines gegebenen Winkels.

1. **Aufgabe.** Ein gegebener spitzer oder stumpfer Winkel soll in drei gleiche Theile getheilt werden.

Lösung: Man construirt die Hyperbel $9x^2 - 3y^2 = a^2$, wobei a beliebig groß angenommen werden kann. Im Scheitel B des einen Zweiges legt man an die Axe den gegebenen Winkel α an und errichtet auf dessen zweiten Schenkel in B eine Senkrechte. Ferner halbirt man die Entfernung des Punktes B vom Brennpunkt C des andern Zweiges und errichtet im Halbirungspunkte H eine 2. Senkrechte bis zum Durchschnitt der ersten im Punkte M. Hierauf beschreibt man mit BM um M einen Kreis, der auch durch C geht, da $BH = CH$ und $MH \perp BC$ ist. Dieser Kreis trifft die Hyperbel in den Punkten A_1 A_2 und A_3, von denen A_1 und A_2 demselben Zweig angehören mögen. Man zieht sodann A_1A_2 und legt, wenn α spitz ist, durch A_2 eine Parallele zur benachbarten Asymptote, oder wenn α stumpf ist, durch A_1 eine Parallele ebenfalls zur benachbarten Asymptote, dann ist im ersten Falle $\alpha = BA_2C$, im zweiten Falle $\alpha = BA_1C$ trisecirt.

Beweis: Nach d. Constr. ist ein Schenkel des Winkels α Sehne, der 2. Tangente des Kreises um M, folglich $\sphericalangle BA_2C$ (bezüglich $\sphericalangle BA_1C$) $= \alpha$ als Peripheriewinkel im entgegengesetzten Kreisabschnitt. Nun sind A_1 und A_2 die beiden Durchschnittspunkte mit dem einen Hyperbelzweige, folglich ist A_1A_2 Trisectionslinie des Winkels BA_2C (bezügl. BA_1C) nach §. 8, 5. Endlich ist A_2P_2 (bezügl. A_1P_1) parallel der benachbarten Asymptote, mithin auch Trisectionslinie des Winkels BA_2C (bezügl. BA_1C) nach §. 8, 4. Der Winkel α ist also trisecirt.

Anmerkung. In der vorstehenden Lösung bleibt die Lage der Hyperbel ungeändert. Man kann sie zur Trisection jedes Winkels < 2 R benutzen, wenn man den Radius so wählt, daß der damit beschriebene Kreis die gegebenen Winkel als Peripheriewinkel auf der Sehne BC faßt. In Klügel's mathematischem Wörterbuche (Th. v. pag. 340) wird zur Trisection eines gegebenen Kreisbogens (resp. Centriwinkels) die gleichseitige Hyperbel gebraucht. Bei dieser Lösung ist die Lage der Hyperbel veränderlich und es ist nöthig, diese Curve für jeden gegebenen Fall besonders zu construiren.

2. Die Trisection eines Peripheriewinkels führt unmittelbar auch zu der des zugehörigen Centriwinkels. Da nun der letztere das Doppelte des erstgenannten beträgt, so läßt sich die Trisection **auf alle Winkel $\leqq 4$ R** ausdehnen. Beachtet man ferner, daß Bogen $A_1 A_2$ = Bogen $A_2 A_3$ = Bogen $A_3 A_1 = \frac{1}{3}$ der Peripherie ist, so folgt, daß auch alle Winkel > 4 R in den Punkten A_1 A_2 und A_3 trisecirt werden. Die oben angegebene Trisection eines Winkels ist daher eine ganz allgemeine.

3. Die elementare Planimetrie lehrt die Construction von Winkeln, welche 90° 60° 36° 24° betragen. Hierauf beruht die Construction des regulären Vierecks, Sechsecks, Zehnecks und Fünfecks, sowie des regulären Dreiecks und Fünfecks. Durch wiederholte Halbirung dieser Winkel findet man folgende reguläre Polygone:

1. das 8eck, 16eck, 32eck, 64eck, 128eck, u. s. w.
2. das 12eck, 24eck, 48eck, 96eck, 192eck, u. s. w.
3. das 20eck, 40eck, 80eck, 160eck, ...
4. das 30eck, 60eck, 120eck, 240eck, ...

Nimmt man nun an, in der vorhergehenden Aufgabe (Fig. XVII.) sei $\alpha = \frac{2}{3}$ R, so ist $\measuredangle A_1 A_2 C = \frac{2}{9}$, also $C A_1$ der Bogen des regulären eingeschriebenen Neunecks. Durch fortgesetzte Halbirung dieses Bogens erhält man die Bogen des regulären 18ecks, 36ecks, 72ecks, 144ecks, u. s. w., während wiederholte Trisection zur Construction des regulären 27ecks, 81ecks, 243ecks u. s. w. führt. In gleicher Weise findet man das reguläre 45eck, 90eck, 135eck u. s. w. aus dem Winkel des regulären Fünfzehnecks = 24°.

§. 10. Der dem Trisectionsdreieck eingeschriebene Kreis.

1. **Aufgabe.** Es soll der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises für das Trisectionsdreieck ABC gefunden werden, wenn $\gamma = 2\,\beta$ ist.

Lösung: Es sei $BO = \frac{1}{3}$ BC, ferner O der Anfang eines rechtwinkligen Coordinatensystems, dessen x-Axe OC ist. Sind nun $(\xi\ \eta)$ die Coordinaten des Mittelpunktes des eingeschriebenen Kreises, so liegt dieser Punkt offenbar auf dem Durchschnitt der Winkelhalbirenden von B und C. Man erhält dann die zusammengehörenden Gleichungen

$$(1)\ \tan \frac{\beta}{2} = \frac{\eta}{\xi + \frac{a}{3}} \quad \text{und} \quad (2)\ \tan \beta = \frac{\eta}{\frac{2}{3} a - \xi}$$

Nun ist $\tan \beta = \dfrac{2 \tan \frac{\beta}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\beta}{2}}$; folglich

$$\frac{\eta}{\frac{2}{3} a - \xi} = \frac{\dfrac{2\,\eta}{\xi + \frac{a}{3}}}{1 - \left(\dfrac{\eta}{\xi + \frac{a}{3}}\right)^2} = \frac{2\,\eta \left(\xi + \frac{a}{3}\right)}{\left(\xi + \frac{a}{3}\right)^2 - \eta^2}$$

Hieraus ergiebt sich

$$\xi^2 + \tfrac{2}{3}\, a\, \xi + \frac{a^2}{9} - \eta^2 = \tfrac{4}{3}\, a\, \xi + \tfrac{4}{9}\, a^2 - 2\, \xi^2 - \tfrac{2}{3}\, a\, \xi$$

also $3\, \xi^2 - \eta^2 = \frac{1}{3}\, a^2$.

Die erhaltene Gleichung hat dieselbe Form wie die Gleichung des Ortes von A $(9\, x^2 - 3\, y^2 = a^2)$; **folglich liegt der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises gleichfalls auf der Trisections-Hyperbel.**

Ist $(2\,R - \gamma) = 2\,(2\,R - \beta)$, so liegt der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises nicht auf der Hyperbel, dagegen läßt sich leicht nachweisen, **daß der Mittelpunkt des Kreises, welcher AB und AC von innen und BC von außen berührt, gleichfalls auf der Hyperbel liegt.**

2. Ist E der Brennpunkt des andern Zweiges, (Fig. XIX.) so wird $CE = \frac{4}{3}\,a$, folglich $AE = \frac{2}{3}\,a + b$. Man erhält dann nach dem Cosinus-Satze

$$\cos\,\varepsilon = \frac{(\frac{4}{3}\,a)^2 + (\frac{2}{3}\,a + b)^2 - b^2}{2\,.\,\frac{4}{3}\,a\,(\frac{2}{3}\,a + b)}$$

$$= \frac{16\,a^2 + 4\,a^2 + 12\,ab + 9\,b^2 - 9\,b^2}{16\,a^2 + 24\,ab}$$

$$= \frac{5\,a + 3\,b}{4\,a + 6\,.\,b}.$$

Nach §. 5, 2a ist $a = \dfrac{c^2 - b^2}{b}$; folglich

$$\cos\,\varepsilon = \frac{5\,(c^2 - b^2) + 3\,b^2}{4\,(c^2 - b^2) + 6\,b^2} = \frac{5\,c^2 - 2\,b^2}{4\,c^2 + 2\,b^2}.$$

Nach §. 5, 4 ist weiter $c = 2\,.\,b\,.\cos\,\beta$, mithin

$$\cos\,\varepsilon = \frac{20\,.\,b^2\,\cos^2\,\beta - 2\,b^2}{16\,b^2\,\cos^2\,\beta + 2\,b^2} = \frac{10\,\cos^2\,\beta - 1}{8\,\cos^2\,\beta + 1}.$$

Nun ist $\cot^2\,\frac{\varepsilon}{2} = \dfrac{1 + \cos\,\varepsilon}{1 - \cos\,\varepsilon} = \dfrac{18\,\cos^2\,\beta}{2 - 2\,\cos^2\,\beta} = \dfrac{9\,\cos^2\,\beta}{\sin^2\,\beta}$; folglich

$$\cot\,\frac{\varepsilon}{2} = 3\,\cot\,\beta.$$

Halbirt man die Winkel C und E und fällt vom Durchschnitt K dieser Halbirungslinien auf EC die Senkrechte KH, so ergiebt sich sodann

$$KH = EH\,\tan\,\frac{\varepsilon}{2} = CH\,\tan\,\beta;\ \text{mithin}$$

$$EH\,\tan\,\frac{\varepsilon}{2} = CH\,\tan\,\beta = CH\,3\,\tan\,\frac{\varepsilon}{2};$$

$$\text{also}\ EH = 3\,CH = a$$

Da ferner K der Mittelpunkt des dem Dreieck ACE eingeschriebenen Kreises ist und die von K auf CE gefällte Senkrechte den Scheitel der Hyperbel trifft, so ergiebt sich die Folgerung.

Verbindet man einen beliebigen Punkt der Hyperbel $9\,x^2 - 3\,y^2 = a^2$ mit beiden Brennpunkten, so liegt der Mittelpunkt des Kreises für das von den Brennlinien und von der Excentricität gebildete Dreieck auf der Scheiteltangente.

3. **Aufgabe.** Der geometrische Ort für die Spitzen eines Dreiecks soll gefunden werden, wenn der Berührungspunkt des eingeschriebenen Kreises die Grundlinie in dem Verhältniß von 1 : 3 theilt.

Lösung: (Fig. XIX.) Es sei $CE = \frac{4}{3}\,a$ und O, die Mitte von CE, der Anfang eines rechtwinkligen Coordinatensystems, dessen x-Axe OC ist. Sind nun $(x_1\ y)$ die Coordinaten des Punktes A, so erhält man die beiden zusammengehörigen Gleichungen

$$(1)\ \tan\,2\,\beta = \frac{y}{\frac{2}{3}\,a - x}\ \text{und}\ (2)\ \tan\,\varepsilon = \frac{y}{\frac{2}{3}\,a + x},$$

während nach der Bedingung der Aufgabe

$$(3)\ \tan\,\frac{\varepsilon}{2} = \frac{1}{3}\,\tan\,\beta\ \text{ist.}$$

Aus den beiden ersten Gleichungen ergiebt sich

$$(1)\ \frac{y}{\frac{2}{3}a - x} = \tan 2\beta = \frac{2\tan\beta}{1 - \tan^2\beta} \text{ und } (2)\ \frac{y}{\frac{2}{3}a + x} = \tan\varepsilon = \frac{2\tan\frac{\varepsilon}{2}}{1 - \tan^2\frac{\varepsilon}{2}}$$

Eliminirt man $\tan\beta$, so lautet die erste Gleichung

$$(1)\ \frac{y}{\frac{2}{3}a - x} = \frac{6 \cdot \tan\frac{\varepsilon}{2}}{1 - 9\tan^2\frac{\varepsilon}{2}};\ \text{also}$$

$$(1)\ \tan^2\frac{\varepsilon}{2} = \frac{y - 6 \cdot \tan\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{2}{3}a - x\right)}{9 \cdot y.}$$

Aus der 2. Gleichung erhält man

$$(2)\ \tan^2\frac{\varepsilon}{2} = \frac{y - 2\tan\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{2}{3}a + x\right)}{y};\ \text{mithin}$$

$$\frac{y - 6\tan\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{2}{3}a - x\right)}{9y} = \frac{y - 2\tan\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{2}{3}a + x\right)}{y}$$

$$\text{oder } y - 6\tan\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{2}{3}a - x\right) = 9y - 18\tan\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{2}{3}a + x\right),$$

$$\text{also } 6 \cdot \tan\frac{\varepsilon}{2}\left\{2a + 3x - \frac{2}{3}a + x\right\} = 8y;$$

$$\text{mithin } \tan\frac{\varepsilon}{2} = \frac{y}{a + 3x}.$$

Substituirt man diesen Werth von $\tan\frac{\varepsilon}{2}$ in die 2. Gleichung, so folgt

$$\frac{y}{\frac{2}{3}a + x} = \frac{\frac{2 \cdot y}{a + 3x}}{1 - \left(\frac{y}{a + 3x}\right)^2} = \frac{2 \cdot y \cdot (a + 3x)}{(a + 3x)^2 - y^2}$$

Man dividirt durch y und beseitigt die Brüche, dann ergiebt sich weiter

$$a^2 + 6ax + 9x^2 - y^2 = \frac{4}{3}a^2 + 4ax + 2ax + 6x^2;$$

$$\text{also } 3x^2 - y^2 = \frac{a^2}{3};$$

d. h. die Ortscurve von A ist identisch mit der Trisections-Hyperbel.

Folgerung: Construirt man eine Scheiteltangente der Hyperbel $9x^2 - 3y^2 = a^2$ und beschreibt mit derselben als Radius um ihren Endpunkt einen Kreis, so schneiden sich die von beiden Brennpunkten an den Kreis gelegten Tangenten auf der Hyperbel.

4. Aufgabe. Es sollen die Durchschnittspunkte des Kreises um K und der Seite AB bestimmt werden.

Lösung. Die Coordinaten des Mittelpunktes sind $x_1 = \frac{a}{3}$ und $y_1 = \varrho_1 = \frac{a}{3}\tan\beta$, folglich ist die Gleichung des Kreises

$$\left(x - \frac{a}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{3}\tan\beta\right)^2 = \frac{a^2\tan^2\beta}{9}.$$

Die Gleichung der Geraden AB ist

$$y = \left(x + \frac{a}{3}\right)\tan\beta.$$

Eliminirt man y, so ergiebt sich:

$$(x - \frac{a}{3})^2 + x^2 \tan^2 \beta = \frac{a^2 \tan^2 \beta}{9}.$$

Die Auflösung dieser Gleichung nach x ergiebt

$$x^2 - \frac{2}{3} ax + \frac{a^2}{9} + x^2 \tan^2 \beta = \frac{a^2}{9} \tan^2 \beta$$

$$x^2 (1 + \tan^2 \beta) - \frac{2}{3} ax = - \frac{a^2}{9} (1 - \tan^2 \beta)$$

$$x^2 - \frac{2}{3} ax \cos^2 \beta = \frac{a^2}{9} (\sin^2 \beta - \cos^2 \beta) = \frac{a^2}{9} (1 - 2 \cos^2 \beta)$$

$$\frac{a^2}{9} \cos^4 \beta \qquad = \qquad \frac{a^2}{9} \cos^4 \beta$$

$$(x - \frac{a}{9} \cos^2 \beta)^2 = \frac{a^2}{9} (1 - \cos^2 \beta)^2$$

$$x = \frac{a}{3} \cos^2 \beta \pm \frac{a}{3} (1 - \cos^2 \beta);$$

folglich $x_1 = \frac{a}{3}$, $x_2 = \frac{a}{3} \cos 2 \beta$;

also $y_1 = \frac{2}{3} a \tan \beta$, $y = \frac{a}{3} \sin 2 \beta$.

Es folgt hieraus, **daß der Durchschnittspunkt (x_1 y_1) des Kreises und der Geraden AB der Endpunkt des Durchmessers ist.**

Die eine von O an den Berührungskreis gelegte Tangente ist $= \frac{a}{3}$, folglich auch die 2. Tangente $= \frac{a}{3}$. Nun ist $\measuredangle$ KOH $= \beta$, folglich der von beiden Tangenten gebildete Winkel $= 2 \beta$.

Bezeichnet man nun mit u und v die Coordinaten des 2. Berührungspunktes, so erhält man: $u = \frac{a}{3} \cos 2 \beta$ und $v = \frac{a}{3} \sin 2 \beta$, also dieselben Werthe wie für x_2 und y_2. **Der 2. Durchschnittspunkt der Geraden AB und des Kreises um K ist daher der Berührungspunkt der von O an letztere gelegten Tangente.**

Da nun $\frac{a}{3}$ der Radius des Hauptkreises der Hyperbel ist, so gilt der Satz.

Der Hauptkreis der Hyperbel, der Berührungskreis um K und die Gerade AB schneiden sich in einem Punkte.

§. 11. Das Viertheilungsdreieck.

1. Man erhält das Viertheilungsdreieck, wenn man in dem n Theilungsdreieck (§ 1.) $n = 4$ setzt. Es gehören dahin alle die Dreiecke, in welchen ein Basiswinkel das Dreifache des andern ist, oder in welchen die Supplemente der Basiswinkel in dem erwähnten Größenverhältniß stehen.

Nimmt man nun an, daß $\gamma = 3 \beta$ ist, so darf β nach §. 1., 4 nicht größer werden als $\frac{1}{2}$ R, während der Werth von α bis 2 R wachsen kann. Stehen dagegen die Supplemente von β und γ in dem Verhältniß von 1 : 3, so ergiebt sich aus §. 1, 5 — 6, daß (2 R — β) zwischen den Grenzen $\frac{1}{2}$ R und $\frac{2}{3}$ R liegt, während das Maximum von α $\frac{2}{3}$ R beträgt.

Die Theilungstransversale bildet mit der Grundlinie einen Winkel $= \frac{1}{2}$ R.

Ein Viertheilungsdreieck ist z. B. dasjenige gleichschenklige Dreieck, in welchem jeder Basiswinkel 36°, der Winkel an der Spitze also 108° beträgt. Zieht man in diesem durch einen Basiswinkel die Theilungstransversale, so wird derselbe in Winkel von 9° und 27° zerlegt.

2. Die Viertheilungscurve erhält man, wenn man in der allgemeinen Aufgabe §. 2. für n den Werth 4 setzt. Die beiden sich ergebenden Gleichungen sind dann

$$(1) \ \frac{y}{x} = \tan \beta \quad (2) \ \frac{y}{a - x} = \tan 3 \beta = \frac{3 \tan \beta - \tan^3 \beta}{1 - 3 \tan^2 \beta}$$

Eliminirt man tan β, so folgt:

$$\frac{y}{a-x} = \frac{\frac{3 \cdot y}{x} - \frac{y^3}{x^3}}{1 - 3\frac{y^2}{x^2}} = \frac{3x^2y - y^3}{x^3 - 3xy^2} \text{ und weiter}$$

$$x^3 - 3xy^2 = 3ax^2 - 3x^3 - ay^2 + xy^2$$

$$\text{oder } 4x^3 - 4xy^2 = 3ax^2 - ay^2.$$

Die Gleichung der Viertheilungscurve ist also, wie nach §. 2. zu erwarten war, vom 3. Grade.

Löst man die erhaltene Gleichung nach y auf, so erhält man:

$$y^2 = \frac{x^2(4x - 3a)}{4x - a} \text{ oder } y = \pm x\sqrt{\frac{4x - 3a}{4x - a}}.$$

Erörterung: Für jeden Werth von y erhält man zwei gleiche entgegengesetzte Werthe von y; die Curve liegt daher symmetrisch gegen die x-Axe.

Während x von o bis $\frac{1}{4}a$ wächst, nimmt y von $+\,o$ bis $+\infty$ zu.

In dem Intervall $x = \frac{1}{4}a$ bis $x = \frac{3}{4}a$ sind sämmtliche Werthe von y imaginär.

Für $x = \frac{3}{4}a$ wird zum zweiten Male $y = o$. Von da ab nimmt mit wachsendem x auch y zu, so daß für $x = \infty$ auch $y = \pm\infty$ wird. Für negative x ist y stets reell und zwar wächst mit zunehmendem x auch y ins Unendliche.

Z. B. $\begin{cases} x = -\frac{1}{4}a, & x = -\frac{1}{2}a, & x = -a \\ y = \pm\frac{1}{4}a\sqrt{2}, & y = \pm\frac{1}{2}a\sqrt{\frac{5}{3}}, & y = \pm a\sqrt{\frac{7}{5}}. \end{cases}$

Das Bild der Curve ist daher folgendes: (Fig. XX.) Errichtet man auf der x-Axe in den Entfernungen $\frac{1}{4}a$ und $\frac{3}{4}a$ Senkrechte, so liegt der eine nach beiden Seiten ins Unendliche verlaufende Zweig der Curve jenseits der zweiten Senkrechten. Zwischen beide Lothe fällt kein Theil der Curve. Links von der ersten Senkrechten liegen zwei weitere mit ihren Enden ins Unendliche sich erstreckende congruente Curvenzweige, welche durch die x-Axe geschieden werden und nur den Punkt B gemein haben.

Die in der Entfernung $\frac{1}{4}a$ auf der x-Axe errichtete Senkrechte characterisirt sich unmittelbar als Asymptote für die beiden links gelegenen Curvenzweige. Es existiren jedoch noch zwei andere Asymptoten, deren Lage leicht zu bestimmen ist. Giebt man der Gleichung der Curve die Form $\frac{y}{x} = \pm\sqrt{\frac{4x - 3a}{4x - a}}$, so ist die linke Seite die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen eine durch B gezogene Gerade mit der positiven Richtung der x-Axe bildet. Für unendlich wachsende positive oder negative x nähert sich die rechte Seite der Gleichung dem Werthe ± 1; d. h. der Winkel, welchen die durch B gehende Gerade mit der positiven Richtung der x-Axe bildet, wird in diesem Falle entweder $\frac{1}{2}R$ oder $\frac{3}{2}R$. Es giebt also noch zwei weitere von B auslaufende, unter $\frac{1}{2}R$ und $\frac{3}{2}R$ gegen die x-Axe geneigte Asymptoten für den rechtsgelegenen Zweig und zugleich für je einen links liegenden.

2. Man verbindet einen Punkt A des rechts liegenden Zweiges mit B und C. Es soll festgestellt werden, in welchem Verhältniß die Winkel β und γ zu einander stehen.

Lösung. Die Coordinaten des Punktes A seien (x y), dann erhält man die Gleichungen

$$(1)\ \tan\beta = \frac{y}{x}\ (2)\ \tan\gamma = \frac{y}{a-x}.$$

Als Gleichung der Curve hat man (3) $y = \pm x \sqrt{\frac{4x - 3a}{4x - a}}$.

Man eliminirt y, so ergiebt sich

$$\tan \gamma = \frac{x \tan \beta}{a - x} \text{ und } \tan \beta = \pm \sqrt{\frac{4x - 3a}{4x - a}}.$$

Aus der letzten Gleichung erhält man auf einfache Weise $x = \frac{a(3 - \tan^2 \beta)}{4 - 4 \tan^2 \beta}$.

Setzt man diesen Werth von x in die vorhergehende Gleichung ein, so findet man

$$\tan \gamma = \frac{3 a \tan \beta - a \tan^3 \beta}{4a - 4a \tan^2 \beta - 3a + a \tan^2 \beta}$$
$$= \frac{3 \tan \beta - \tan^3 \beta}{1 - 3 \tan^2 \beta} = \tan 3 \beta.$$

folglich $\gamma = 3 \beta$.

Das Dreieck ABC ist also ein Viertheilungsdreieck und eine durch A parallel der benachbarten Asymptote gezogene Gerade theilt daher den Winkel A in dem Verhältniß von 1 : 3.

3. **Aufgabe.** Ein Kreis mit beliebigem Radius r ist durch die Punkte B und C gelegt. Es sollen die Durchschnittspunkte desselben mit der Curve bestimmt werden.

Lösung: Behält man das angenommene Coordinatensystem bei, so sind die Coordinaten des Mittelpunktes

$$x_1 = \frac{a}{2} \text{ und } y_1 = \frac{a}{2} \cot \alpha,$$

folglich die Gleichung des Kreises

$$(1) \quad \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{2} \cot \alpha\right)^2 = r^2 = \frac{a^2}{4 \sin^2 \alpha},$$

wenn α der auf der Sehne BC stehende Peripheriewinkel ist.

Ist nun $(\xi\ \eta)$ ein Durchschnittspunkt beider Curven, so gelten die beiden Gleichungen

$$(1) \quad \eta = \frac{a}{2} \cot \alpha \pm \sqrt{\frac{a^2}{4 \sin^2 \alpha} - \left(\xi - \frac{a}{2}\right)^2}$$

$$\text{und } \eta = \pm \xi \sqrt{\frac{4\xi - 3a}{4\xi - a}}; \text{ folglich}$$

$$\frac{a}{2} \cot \alpha \pm \sqrt{\frac{a^2}{4 \sin^2 \alpha} - \left(\xi - \frac{a}{2}\right)^2} = \pm \xi \sqrt{\frac{4\xi^2 - 3a}{4\xi - a}}.$$

Man erhebt beide Seiten ins Quadrat, dann folgt

$$\frac{a^2}{4} \cot^2 \alpha \pm a \cot \alpha \sqrt{\frac{a^2}{4 \sin^2 \alpha} - \left(\xi - \frac{a}{2}\right)^2} + \frac{a^2}{4 \sin^2 \alpha} - \xi^2 + a \xi - \frac{a^2}{4}$$
$$= \xi^2 \frac{4\xi - 3a}{4\xi - a}.$$

Nun ist $\frac{a^2}{4 \sin^2 \alpha} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} \cot^2 \alpha$, mithin lautet die Gleichung, wenn man die rationalen Größen auf die rechte Seite bringt

$$\pm a \cot \alpha \sqrt{\frac{a^2}{4 \sin^2 \alpha} - \left(\xi - \frac{a}{2}\right)^2} = \xi^2 - a \xi - \frac{a^2}{2} \cot^2 \alpha + \xi^2 \frac{4\xi - 3a}{4\xi - a}$$
$$= \frac{4\xi^3 - a\xi^2 - 4a\xi^2 + a^2\xi - 2a^2\xi \cot^2 \alpha + \frac{a^3}{2} \cot^2 \alpha + 4\xi^3 - 3a\xi^2}{4\xi - a}$$

$$= \frac{16\,\xi^3 - 16\,a\,\xi^2 + 2\,a^2\,\xi\,(1 - 2\cot^2\alpha) + a^3\cot^2\alpha}{8\,\xi - 2\,a}$$

Man beseitigt die Brüche und erhebt nochmals ins Quadrat, dann ergiebt sich

$$a^2\cot^2\alpha\left(\frac{a^2}{4\sin^2\alpha} - \xi^2 + a\,\xi - \frac{a^2}{4}\right)\left(64\,\xi^2 - 32\,a\xi + 4\,a^2\right)$$
$$= \left\{16\,\xi^3 - 16\,a\,\xi^2 + 2\,a^2\,\xi\,(1 - 2\cot^2\alpha) + a^3\cot^2\alpha\right\}^2$$

Beachtet man, daß $\frac{a^2}{4\sin^2\alpha} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4}\cot^2\alpha$ ist, so erhält man links

$16\,a^4\,\xi^2\cot^4\alpha - 8\,a^5\,\xi\cot^4\alpha + a^6\cot^4\alpha - 64\,a^2\,\xi^4\cot^2\alpha + 32\,a^3\,\xi^3\cot^2\alpha -$
$4\,a^4\,\xi^2\cot^2\alpha + 64\,a^3\,\xi^3\cot^2\alpha - 32\,a^4\,\xi^2\cot^2\alpha + 4\,a^5\,\xi\cot^2\alpha$
$= - 64\,a^2\,\xi^4\cot^2\alpha + 96\,a^3\,\xi^3\cot^2\alpha - 36\,a^4\,\xi^2\cot^2\alpha + 16\,a^4\,\xi^2\cot^4\alpha +$
$4\,a^5\,\xi\cot^2\alpha - 8\,a^5\,\xi\cot^4\alpha + a^6\cot^4\alpha$

Die rechte Seite ergiebt

$256\,\xi^6 - 512\,a\,\xi^5 + 64\,a^2\,\xi^4 - 128\,a^2\,\xi^4\cot^2\alpha + 32\,a^3\,\xi^3\cot^2\alpha + 256\,a^2\,\xi^4 -$
$64\,a^3\,\xi^3 + 128\,a^3\,\xi^3\cot^2\alpha - 32\,a^4\,\xi^2\cot^2\alpha + 4\,a^4\,\xi^2 - 16\,a^4\,\xi^2\cot^2\alpha +$
$16\,a^4\,\xi^2\cot^4\alpha + 4\,a^5\,\xi\cot^2\alpha - 8\,a^5\,\xi\cot^4\alpha + a^6\cot^4\alpha$
$= 256\,\xi^6 - 512\,a\,\xi^5 + 320\,a^2\,\xi^4 - 128\,a^2\,\xi^4\cot^2\alpha - 64\,a^3\,\xi^3 + 160\,a^3\,\xi^3\cot^2\alpha$
$+ 4\,a^4\,\xi^2 - 48\,a^4\,\xi^2\cot^2\alpha + 16\,a^4\,\xi^2\cot^4\alpha + 4\,a^5\,\xi\cot^2\alpha - 8\,a^5\,\xi\cot^4\alpha +$
$a^6\cot^4\alpha$

Die 4 letzten Glieder beider Gleichungen heben sich fort, folglich bleibt

$- 64\,a^2\,\xi^4\cot^2\alpha + 96\,a^3\,\xi^3\cot^2\alpha - 36\,a^4\,\xi^2\cot^2\alpha = 256\,\xi^6 - 512\,a\,\xi^5 + 320\,a^2\,\xi^4$
$- 128\,a^2\,\xi^4\cot^2\alpha - 64\,a^3\,\xi^3 + 160\,a^3\,\xi^3\cot^2\alpha + 4\,a^4\,\xi^2 - 48\,a^4\,\xi^2\cot^2\alpha$

Durch Vereinfachung ergiebt sich

$256\,\xi^6 - 512\,a\,\xi^5 + 320\,a^2\,\xi^4 - 64\,a^2\,\xi^4\cot^2\alpha - 64\,a^3\,\xi^3 + 64\,a^3\,\xi^3\cot^2\alpha +$
$4\,a^4\,\xi^2 - 12\,a^4\,\xi^2\cot^2\alpha = o$

Hieraus folgt, daß 2 Wurzeln $\xi = o$ existiren, denen die Werthe von $\eta = \pm\,o$ entsprechen. Es sind dies die Coordinaten des Punktes B. Zur Bestimmung der übrigen Durchschnittspunkte bleibt die Gleichung

$$\xi^4 - 2\,a\,\xi^3 + \tfrac{1}{4}\,a^2\,\xi^2\,(5 - \cot^2\alpha) + \tfrac{1}{4}\,a^3\,\xi\,(\cot^2\alpha - 1) + \tfrac{1}{64}\,a^4\,(1 - 3\cot^2\alpha) = o$$

Wenn man das Coordinatensystem parallel zur ersten Lage mit dem Anfange nach der Mitte von BC verlegt und die neuen Coordinaten mit $x^1\,y^1$ bezeichnet, so erhält man, da $\xi = x^1 + \frac{a}{2}$ wird,

$$\begin{aligned}
\xi^4 &= x^{1\,4} + 2\,a\,x^{1\,3} + \tfrac{3}{2}\,a^2\,x^{1\,2} + \tfrac{1}{2}\,a^3\,x^1 + \tfrac{1}{16}\,a^4\\
- 2\,a\,\xi^3 &= - 2\,a\,x^{1\,3} - 3\,a^2\,x^{1\,2} - \tfrac{3}{2}\,a^3\,x^1 - \tfrac{1}{4}\,a^4\\
+ \tfrac{1}{4}\,a^2\,\xi^2\,(5 - \cot^2\alpha) &= + \tfrac{5}{4}\,a^2\,x^{1\,2} - \tfrac{1}{4}\,a^2\,x^{1\,2}\cot^2\alpha + \tfrac{5}{4}\,a^3\,x^1 - \tfrac{1}{4}\,a^3\,x^1\cot^2\alpha\\
&\quad + \tfrac{5}{16}\,a^4 - \tfrac{1}{16}\,a^4\cot^2\alpha\\
+ \tfrac{1}{4}\,a^3\,\xi\,(\cot^2\alpha - 1) &= - \tfrac{1}{4}\,a^3\,x^1 + \tfrac{1}{4}\,a^3\,x^1\cot^2\alpha - \tfrac{1}{8}\,a^4 + \tfrac{1}{8}\,a^4\cot^2\alpha\\
+ \tfrac{1}{64}\,a^4\,(1 - 3\cot^2\alpha) &= + \tfrac{1}{64}\,a^4 - \tfrac{3}{64}\,a^4\cot^2\alpha\\
\hline
o &= x^4 - \tfrac{1}{4}\,a^2\,x^{1\,2}\,(1 + \cot^2\alpha) + \tfrac{1}{64}\,a^4\,(1 + \cot^2\alpha)
\end{aligned}$$

$$\text{oder } x^{1\,4} - \frac{a^2\,x^{1\,2}}{4\,.\,\sin^2\alpha} = - \frac{a^4}{64\,.\,\sin^2\alpha}$$
$$+ \frac{1}{64}\,\frac{a^4}{\sin^4\alpha} = + \frac{1}{64}\,\frac{a^4}{\sin^4\alpha}$$
$$\overline{\left(x^{1\,2} - \frac{1}{8}\,\frac{a^2}{\sin^2\alpha}\right)^2 = \frac{a^4\cos^2\alpha}{64\sin^4\alpha}}$$

$$x^{1\,2} = \tfrac{1}{8}\,\frac{a^2}{\sin^2\alpha} \pm \tfrac{1}{8}\,\frac{a^2\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$$

$$x^{1\,2} = \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{4}\,a^2\,\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\alpha} \\[2ex] \frac{1}{4}\,a^2\,\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\alpha} \end{array}\right.$$

also $x_1 = \frac{1}{2}\,a\,\dfrac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha} = \dfrac{a}{4\sin\frac{\alpha}{2}}$

$$x_2 = -\tfrac{1}{2}\,a\,\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha} = -\frac{a}{4\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$x^3 = \tfrac{1}{2}\,a\,\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha} = \frac{a}{4\,.\cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$x_4 = -\tfrac{1}{2}\,a\,\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha} = -\frac{a}{4\cos\frac{\alpha}{2}}$$

Durch die Verlegung des Coordinatenanfanges sind die Gleichungen der Viertheilungscurve und des Kreises in folgende übergegangen

$$(1)\ y^{1\,2} = (x^1 + \tfrac{a}{2})^2\,\frac{4\,x^1 - a}{4\,x^1 + a} \quad (2)\ x^{1\,2} + (y^1 - \tfrac{a}{2}\cot\alpha)^2 = \frac{a^2}{4\sin^2\alpha}$$

Um y^1 y^2 y^3 und y^4 zu bestimmen, setzt man die für x^1 gefundenen Werthe in beide Gleichungen ein, und wählt diejenigen Werthe von y^1, welche beiden Gleichungen zugleich genügen.

Man erhält zunächst

$$y^{1\,2} = \left\{\frac{a}{4\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{a}{2}\right\}^2\,\frac{a - a\sin\frac{\alpha}{2}}{a + a\sin\frac{\alpha}{2}} = a^2\left\{\frac{1 + 2\sin\frac{\alpha}{2}}{4\sin\frac{\alpha}{2}}\right\}^2\,\frac{1 - \sin\frac{\alpha}{2}}{1 + \sin\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{1 - \sin\frac{\alpha}{2}}{1 - \sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$= a^2\left\{\frac{1 + 2\sin\frac{\alpha}{2}}{4\sin\frac{\alpha}{2}}\right\}^2\,\frac{\left(1 - \sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

folglich $y^1 = \pm\,a\,.\,\dfrac{1 + 2\sin\frac{\alpha}{2}}{4\sin\frac{\alpha}{2}}\,.\,\dfrac{1 - \sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \pm\,a\,.\,\dfrac{1 + \sin\frac{\alpha}{2} - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{4\,.\sin\frac{\alpha}{2}\,.\cos\frac{\alpha}{2}}.$

Andererseits erhält man

$$y^1 = \frac{\alpha}{2}\cot\alpha \pm \sqrt{\frac{a^2}{4\sin^2\alpha} - \frac{a^2}{16\sin^2\frac{\alpha}{2}}} = a\,.\,\frac{\left(1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}{4\,.\sin\frac{\alpha}{2}\,\cos\frac{\alpha}{2}} \pm$$

$$\sqrt{\frac{a^2}{16\,.\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}} - \frac{a^2}{16\,.\sin^2\frac{\alpha}{2}}} = a\,\frac{\left(1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} \pm \sin\frac{\alpha}{2}\right)}{4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$$

Aus der Vergleichung beider Werthe von y^1 geht hervor, daß

$$y_1 = a \cdot \frac{1 + \sin\frac{\alpha}{2} - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = a\,\frac{\left(1 + 2 \cdot \sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(1 - \sin\frac{\alpha}{2}\right)}{4 \cdot \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} \text{ ist.}$$

In analoger Weise findet man, wenn man x_2 in beide Gleichungen substituirt,

1. aus der Gleichung des Kreises: $y^1 = a\,\dfrac{\left(1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} \pm \sin\frac{\alpha}{2}\right)}{4 \cdot \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$.

2. aus der Gleichung der Viertheilungscurve: $y^1 = \pm\, a\,\dfrac{\left(1 - 2\sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(1 + \sin\frac{\alpha}{2}\right)}{4 \cdot \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$.

folglich $$y_2 = a\,\frac{\left(1 - \sin\frac{\alpha}{2} - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}{4 \cdot \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = a \cdot \frac{\left(1 - 2\sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(1 + \sin\frac{\alpha}{2}\right)}{4 \cdot \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Durch Substitution von x^3 in beide Gleichungen erhält man ferner

$$(1)\quad y^1 = a \cdot \frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 \pm \cos\frac{\alpha}{2}}{4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$(2)\quad y^1 = \pm\, a\,\frac{\left(1 + 2\cos\frac{\alpha}{2}\right)\left(1 - \cos\frac{\alpha}{2}\right)}{4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}},$$

folglich $$y_3 = -\,a \cdot \frac{1 + \cos\frac{\alpha}{2} - 2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = -\,a\,\frac{\left(1 + 2\cos\frac{\alpha}{2}\right)\left(1 - \cos\frac{\alpha}{2}\right)}{4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Endlich ergiebt sich durch Substitution von x_4 in beide Gleichungen

$$(1)\quad y^1 = a\,\frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 \pm \cos\frac{\alpha}{2}}{4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$(2)\quad y^1 = \pm\, a\,\frac{\left(1 - 2\cos\frac{\alpha}{2}\right)\left(1 + \cos\frac{\alpha}{2}\right)}{4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}},$$

mithin $$y_4 = -\,a \cdot \frac{1 - \cos\frac{\alpha}{2} - 2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{4 \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}} = -\,a\,\frac{\left(1 - 2\cos\frac{\alpha}{2}\right)\left(1 + \cos\frac{\alpha}{2}\right)}{4 \cdot \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Erörterung. y_1 ist für jeden Winkel $\alpha < 2$ R positiv, y_3 negativ.
y_2 ist negativ, wenn $\alpha > 60^0$, Null, wenn $\alpha = 60^0$, und positiv, wenn $\alpha < 60^0$ ist.
y_4 ist negativ, wenn $\alpha > 120^0$, Null, wenn $\alpha = 120^0$, und positiv, wenn $\alpha < 120^0$ ist.

Der Kreis schneidet daher für jeden Winkel $\alpha < 2\ R$ den rechts liegenden Curvenzweig oberhalb $(x_1\ y_1)$ und unterhalb $(x_3\ y_3)$ der x=Axe in je einem Punkte.

Für die beiden links liegenden Zweige sind folgende Fälle möglich: 1. Der Kreis schneidet nur den obern Zweig in 2 Punkten, wenn $\alpha < 60^0$ ist; 2. Der Kreis schneidet den obern Zweig und geht durch B, wenn $\alpha = 60^0$; 3. Der Kreis schneidet den obern und untern Zweig in je einem Punkte, wenn $60^0 < \alpha < 120^0$ ist; 4. Der Kreis geht durch B und trifft den untern Zweig, wenn $\alpha = 120^0$ ist; 5. Der Kreis schneidet nur den untern Zweig in zwei Punkten, wenn $120^0 < \alpha < 180^0$ ist.

4. **Aufgabe.** Die Lage der Durchschnittspunkte beider Curven $P_1\ P_2\ P_3$ und P_4 zu einander soll festgestellt werden. (Fig. XXI.)

Lösung: Die Entfernung $P_1\ P_2$ ist $= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ und die Entfernung $P_3\ P_4$ ist $= \sqrt{(x_3 - x_4)^2 + (y_3 - y_4)^2}$.

Nun ergiebt sich

$$x_1 - x_2 = \frac{a}{4 \sin \frac{\alpha}{2}} + \frac{a}{4 \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$x_3 - x_4 = \frac{a}{4 \cos \frac{\alpha}{2}} + \frac{a}{4 \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2 . \cos \frac{\alpha}{2}}$$

$$y_1 - y_2 = a . \frac{1 + \sin \frac{\alpha}{2} - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{4 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} - a . \frac{1 - \sin \frac{\alpha}{2} - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{4 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}$$

$$y_3 - y_4 = - a \frac{1 + \cos \frac{\alpha}{2} - 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{4 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} + a . \frac{1 - \cos \frac{\alpha}{2} - 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{4 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{- a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

Folglich ist:

$$P_1\ P_2 = \sqrt{\frac{a^2}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} + \frac{a^2}{4 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{\sin \alpha} = 2 . r.$$

$$P_3\ P_4 = \sqrt{\frac{a^2}{4 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} + \frac{a^2}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{\sin \alpha} = 2\ r.$$

Folgerung: $P_1\ P_2$ und $P_3\ P_4$ sind Durchmesser des Kreises.

Zur Feststellung des Winkels, unter welchem beide Durchmesser sich schneiden, dient Folgendes: Die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen $P_1\ P_2$ mit der pos. Richtung der x=Axe bildet, ist

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{a}{2 . \cos \frac{\alpha}{2}}}{\frac{a}{2 . \sin \frac{\alpha}{2}}} = \tan \frac{\alpha}{2},$$

und die trig. Tangente des Winkels, welchen $P_3\ P_4$ mit der pos. Richtung der x=Axe bildet, ist

$$\frac{y_3 - y_4}{x_3 - x_4} = \frac{-\dfrac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{a}{2\,.\,\cos\frac{\alpha}{2}}} = -\cot\frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{\tan\frac{\alpha}{2}};$$

d. h. die beiden Durchmesser schneiden sich senkrecht.

Folgerung. Für jeden Radius, mit welchen man durch B und C einen Kreis legt, bilden die Durchschnittspunkte P_1 P_2 P_3 und P_4 die Ecken eines Quadrates.

5. Beschreibt man von B aus mit BC als Radius einen Kreis, welcher den rechtsliegenden Zweig in A trifft, so ist AC die Seite des dem Kreise eingeschriebenen regulären Vierzehnecks. (Fig. XXII.)

Beweis: AB = BC als Radien; folglich $\alpha = \gamma = 3\,\beta$; mithin $3\,\beta + \beta + 3\,\beta = 2\,R$, also $\beta = \frac{2}{7}\,R$; d. h. AC ist die Seite des regulären eingeschriebenen Vierzehnecks.

Uebersicht der wesentlichsten Resultate.

Wenn in einem Dreieck die Winkel an der Grundlinie oder deren Supplemente sich wie 1 : (n — 1) verhalten, so wird der Winkel an der Spitze durch die Transversale, deren Neigung gegen die Grundlinie $\frac{2}{n}$ R beträgt, gleichfalls in dem Verhältniß von 1 : (n — 1) getheilt. (§. 1)

Wenn die Transversale, welche einen Dreieckswinkel im Verhältniß von 1 : (n — 1) theilt, die Gegenseite unter einem Winkel = $\frac{2}{n}$ R trifft, so verhalten sich auch die beiden andern Dreieckswinkel oder deren Supplemente wie 1 : (n — 1). (§. 1.)

Stehen in einem Dreiecke die Winkel an der Grundlinie im Verhältniß von 1 : (n — 1), so wird der Ort der Dreiecksspitzen, d. h. die n Theilungscurve des Winkels an der Spitze, durch eine Gleichung von (n — 1)ten Grade bestimmt. (§. 2.)

Die erhaltene Curve kann auch zur Construction regulärer Polygone verwendet werden. Durch die Viertheilungscurve (Gl. 3. Grades) wird z. B. die Construction des regulären Vierzehnecks, durch die Sechstheilungscurve (Gl. 5. Grades) die des regulären 22ecks ermöglicht. (§. 3.)

Die Curve der Zweitheilung ist eine Gerade, deren Gleichung x = o ist. (§. 4.)

Ist in einem Dreieck $\gamma = 2\,\beta$ oder $(2\,R - \gamma) = 2\,(2\,R - \beta)$ (Trisectionsdreieck), so ist $ab = \pm\,(c^2 - b^2)$ (§. 5.)

Ein Dreieck, in welchem $ab = \pm\,(c^2 - b^2)$ ist, ist ein Trisectionsdreieck, d. h. ein Dreieck, in welchem $\measuredangle\,\alpha$ durch eine gegen die Grundlinie a unter 60° geneigte Transversale trisecirt wird. (§. 5.)

Trisectionsdreiecke sind z. B. solche, deren Seiten sich wie 2 : 3 : 4 oder wie 4 : 5 : 6 verhalten. (§. 5.)

Der geometrische Ort für die Spitzen des Trisectionsdreiecks ist eine Hyperbel, deren Gleichung $9\,x^2 - 3\,y^2 = a^2$ ist. Ihre Excentricität ist doppelt so groß als ihre Hauptaxe und ihre Asymptoten bilden Winkel von 60° und 120° mit der x-Axe. (§. 6.)

Verbindet man einen Punkt der erwähnten Hyperbel mit dem zugehörigen Brennpunkt und dem Scheitel des andern Zweiges, oder mit dem zugehörigen Scheitel und dem

Brennpunkt des andern Zweiges, so stehen in dem Dreieck, welches diese Linien und die x-Axe bilden, die Winkel an letzterer oder deren Supplemente in dem Verhältniß von 1 : 2. (§. 7.)

Verbindet man einen Punkt der Hyperbel mit dem zugehörigen Brennpunkt und dem Scheitel des andern Zweiges, oder umgekehrt, so wird der von beiden Linien gebildete Winkel durch eine Parallele zur benachbarten Asymptote im Verhältniß von 1 : 2 getheilt, (trisecirt). (§. 7.)

Wenn man durch den Brennpunkt des einen Zweiges und durch den Scheitel des andern mit beliebigem Radius einen Kreis legt, so schneidet dieser die Hyperbel in drei weitern Punkten, welche die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks bilden. (§. 8.)

Verbindet man die 3 zuletzt erwähnten Punkte mit den Endpunkten der Kreissehne, so sind zwei dieser Verbindungslinien Trisectionslinien der drei auf der Kreissehne stehenden Peripheriewinkel, und zwar trisecirt eine derselben gleichzeitig einen Peripheriewinkel und sein Supplement; die 2ten Trisectionslinien der 3 Peripheriewinkel erhält man, wenn man durch ihre Spitzen zu den Asymptoten der Hyperbel Parallele zieht. (§. 8.)

Ist in einem Dreieck $\gamma = 2\beta$, so ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte der eingeschriebenen Kreise die Trisectionshyperbel $9x^2 - 3y^2 = a^2$. Wenn dagegen $(2R - \gamma) = 2(2R - \beta)$ ist, so ist diese Hyperbel der geometrische Ort für die Mittelpunkte eines äußern Berührungskreises. (§. 10.)

Verbindet man einen Punkt der Trisectionshyperbel mit beiden Brennpunkten, so liegt in dem von den Brennlinien und der Excentricität gebildeten Dreieck der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises auf der Scheiteltangente. (§. 10.)

Die Trisectionshyperbel ist der geometrische Ort für die Spitzen aller Dreiecke, in welchen die Grundlinie durch den Berührungspunkt des eingeschriebenen Kreises in dem Verhältniß von 1 : 3 getheilt wird. (§. 10.)

Wenn man von der Spitze des Dreiecks, welches von den Brennlinien und der Excentricität der Trisectionshyperbel gebildet wird, die Scheitellinie nach dem andern Zweige zieht, so geht diese 1) durch den Endpunkt des auf der Hauptaxe senkrecht errichteten Durchmessers des eingeschriebenen Kreises, 2) durch den Durchschnitt des eingeschriebenen Kreises und des Hauptkreises der Hyperbel. (§. 10.)

Die Gleichung der Viertheilungscurve ist

$$y = \pm x \sqrt{\frac{4x - 3a}{4x - a}}$$

Sie besitzt 3 Asymptoten. Zwei derselben gehen durch den Coordinatenanfang und bilden mit der x-Axe Winkel von 45° und 135°. Die dritte steht senkrecht auf der x-Axe in der Entfernung $x = \frac{a}{4}$ vom Coordinatenanfange. (§. 11.)

Jeder Kreis, welcher die Seite α des Viertheilungsdreiecks als Sehne aufnimmt, schneidet die Viertheilungscurve außer im Punkte $x = o$, $y = \pm o$ in vier weitern Punkten, welche die Ecken eines Quadrates bilden. (§. 11.)

Beschreibt man vom Coordinatenanfange B als Mittelpunkt mit der Linie a als Radius einen Kreis und verbindet den Endpunkt von a mit dem nächstliegenden Durchschnittspunkte der Curve, so ist diese Sehne die Seite des regulären eingeschriebenen Vierzehnecks. (§. 11.)

Günther, Oberlehrer.

Bericht

über das Schuljahr von Ostern 1876 bis Ostern 1877.

A. Lehrverfassung.

1. Lehrplan.

Secunda. Ordinarius: Der Rektor.

1. **Deutsch.** 3 St. Göthes „Egmont" (S.) und Lessings „Minna von Barnhelm" (W.) Uebungen im Disponieren vorgelegter Themata und im Rezitieren. Deutsche Aufsätze. Uebersicht über die neuere Literatur. Herr Dr. Holtheuer.
2. **Lateinisch.** 4. St. Wiederholungen der frühern Pensen. Gebrauch der Partizipien, Konjunktionen, der Nebensätze, consecutio temporum, oratio obliqua. Mündliche Uebersetzungsübungen aus dem Deutschen ins Lateinische nach Spieß, 4. Theil. Hauptsachen der Prosodie und Metrik. Gelesen wurden: a) (S.) Sallust. de Catilinae conjur. b) (W.) Ovid. Metam. XII, 210 — XIII., 398 [Siebelis, Abschn. 37, 43 ffg. und 38] Exerzitien und Extemporalien. Herr Dr. Holtheuer.
3. **Französisch.** 4 St. Grammatik nach der Schulgrammatik von Plötz: Abschnitt VIII., Lekt. 74 ffg. IX. IV. und V. der methodischen Grammatik nebst den entsprechenden Abschnitten der systematischen Grammatik. Gelesen wurden aus den Lectures choisies von Plötz: III., 1—3; IV., 3. 4; V., 9: VI., 3—5 und X., 5: acte I.—II. Auswendiglernen ausgewählter Stücke. Retroversionen. Uebungen im Französischsprechen. Alle vierzehn Tage abwechselnd ein Exerzitium oder Extemporale, zuweilen ein Diktat. Der Rektor.
4. **Englisch.** 3 St. Grammatik: Plate, Th. II.: Lekt. 35—60. Gelesen wurden aus: „The British classical authors by Herrig": Swift; Goldsmith. Auswendiglernen ausgewählter Stücke aus derselben Sammlung. Zurückübersetzungen. Alle vierzehn Tage abwechselnd ein Exerzitium oder ein Extemporale, manchmal ein Diktat. Der Rektor.
5. **Religion.** 2 St. Brief an die Römer. Glaubens- und Sittenlehre. Kirchengeschichte nach dem Hilfsbuch von Noack §. 46—70. Wiederholung aus frühern Pensen. Herr Dr. Holtheuer.
6. **Geographie.** 1 St. Geographie der Staaten Europas nebst deren Kolonien. Herr Haacke.
7. **Geschichte.** 2 St. Griechische Geschichte bis zu den Diadochen; römische Geschichte bis Mark Aurel (S.); brandenburgisch-preußische Geschichte (W.) Herr Haacke.

8. **Naturkunde.** 6 St. a) Botanik (S.) Das Wichtigste aus der Pflanzen-Anatomie und Physiologie, Systeme von Linné und Decandolle. Uebersicht der Pflanzen nach ihrer geographischen Verbreitung und ihrem Nutzen für technische und Kultur-Zwecke. Die wichtigsten Familien des natürlichen Systems nebst Beschreibungen. Zoologie (W.): Allgemeine Uebersicht des Thierreichs, das Wichtigste aus der Anatomie und Physiologie. Wiederholungen. 2 St. Herr Hanow. — b) Mineralogie: Terminologie und Systematik, speziell Oryktognosie und Geologie. 2 St. Herr Oberlehrer Günther. — c) Physik: Allgemeine Eigenschaften der Körper; Wärmelehre. Im letzten Vierteljahre Wiederholung der anorganischen Chemie und Elektrizität. 2 St. Herr Oberlehrer Günther.
9. **Mathematik.** 5 St. Quadratische Gleichungen, Exponential-Gleichungen, arithmetische und geometrische Progressionen, Zinseszins- und Rentenrechnung. Ebene Trigonometrie; algebraische Konstruktionen. Herr Oberlehrer Günther.
10. **Zeichnen.** 2 St. Freihandzeichnen nach W. Hermes und H. Troschel: Menschliche Figuren, Bäume, größere Landschaften u. s. w. Arabesken auf Thonpapier mit Estompe und mit zwei Kreiden. — Erweiterung der Perspektive. — Fortsetzung der Lehre von der Projektion. Herr Berger.

Tertia. Ordinarius: Herr Oberlehrer Günther.

1. **Deutsch.** 3 St. Lesung und Erklärung ausgewählter Stücke des 6. Theiles des Lübenschen Lesebuchs. Rezitierübungen. Schriftliche Uebungen. Alle 3 Wochen ein Aufsatz. Herr Dr. Rinne.
2. **Lateinisch.** 5 St. Caes. Bell. Gall. lib. II. und III. Eingehende Behandlung der Lehre vom Gebrauche der Kasus, Lehre vom Infinitivus, dem Partizipium, Gerundium, Supinum, das Wichtigste von den Nebensätzen. Exerzitien und Extemporalien. Mündliche Uebersetzungs-Uebungen aus dem Deutschen in das Lateinische nach Spieß 3. Theil. Herr Dr. Rinne.
3. **Französisch.** 4 St. Grammatik nach der Schulgrammatik von Plötz: Lekt. 1—28. der methodischen Grammatik nebst den entsprechenden Abschnitten der systematischen Grammatik. Gelesen wurden aus den Lectures choisies von Plötz: I., 1—25.; II., 8—12 und Poetisches, auswendig gelernt ausgewählte Stücke derselben Sammlung. Alle vierzehn Tage ein Exerzitium oder Extemporale. Der Rektor.
4. **Englisch.** 4. St. Einübung der Aussprache, Formenlehre und Hauptsachen der Syntax nach dem Lehrbuche von Baskerville. Zurückübersetzungen. Alle vierzehn Tage ein Exerzitium oder Extemporale. Der Rektor.
5. **Religion.** 2 St. Wiederholung des 2. und 3. Artikels und des 3. Hauptstücks, Erklärung des 4. und 5. Hauptstücks des lutherschen Katechismus. Lesung und Erklärung der Apostelgeschichte. Lernen von Kirchenliedern. Unterscheidungslehren der christl. Konfessionen. Herr Dr. Holtheuer.
6. **Geographie.** 2 St. Wiederholung des Pensums für Quarta (S.) Asien, Afrika, Amerika und Australien. (W.) Herr Haacke.
7. **Geschichte.** 2 St. Deutsche Geschichte bis zum 30jährigen Kriege incl. (S.) und brandenburgisch-preußische Geschichte (mit Einlage der einschlagenden Hauptsachen der allgemeinen Geschichte.) (W.) Herr Haacke.
8. **Naturgeschichte.** 2 St. a) Botanik (S.): System von Linné spezieller, Uebungen im Bestimmen der wichtigsten Pflanzen-Gattungen und Spezies nach Leunis. — b) Zoologie (W.): Allgemeine Einleitung zur Zoologie, Systematik, Insekten, Skelett des Menschen, nach Leunis. Herr Hanow.

9. **Mathematik.** 6 St. a) Arithmetik (3 St.): Im Anschluß an Hochheim, Heft I. § 60—101. Potenzrechnung, Wurzelgrößen, Quadrat- und Kubikwurzeln, imaginäre Größen, Logarithmen, Gleichungen mit einer und mehreren Unbekannten. Termin- und Mischungsrechnung. b) Geometrie (3 St.): Wiederholung des Quarta-Pensums. Vergleichung der Parallelogramme und Dreiecke nach ihrem Flächeninhalt; Aehnlichkeitssätze. Lehre vom Kreise, von den regulären Polygonen und von den Harmonikalen. (Kambly §. 82—152.) Jede 2. und 4. Woche eine Arbeit. Herr Oberlehrer Günther.
10. **Zeichnen.** 2 St. Arabesken, Ornamente u. s. w in Blei und Kreide. — Fortsetzung des geometrischen Zeichnens und der Linearperspektive. Elemente der Projektionslehre. Herr Berger.

Quarta. Ordinarius: Herr Dr. Holtheuer.

1. **Deutsch.** 3 St. Lesung und Erklärung ausgewählter Sprachstücke des 5. Theiles des Lübenschen Lesebuchs. Wiederholung der Formlehre. Spezielle Behandlung des zusammengesetzten Satzes. Schriftliche Uebungen. Rezitierübungen. Orthographische Uebungen. Von 3 zu 3 Wochen eine Arbeit zur Korrektur des Lehrers. Herr Dr. Holtheuer.
2. **Lateinisch.** 6 St. Wiederholung und Erweiterung der Formlehre; Fortsetzung der Einübung der Konstruktion des acc. c. inf. und des abl. abs., Gebrauch der Konjunktionen ut, ne, quin, quominus. Die wichtigsten Kasusregeln. Mündliche Uebersetzungsübungen aus dem Deutschen in das Lateinische nach Spieß 2. und 3. Theil. b) Lektüre: Aus Wellers Herodot: Abschnitt I.—XI. (Seite 1—58). Jede Woche ein Exerzitium oder Extemporale. Herr Dr. Holtheuer.
3. **Französisch.** 5 St. Einprägung der Lektionen 61—112 der Elementargrammatik von Plötz. Gelesen wurden die Stücke des angehängten Lesebuchs. Auswendiglernen einzelner Stücke. Nachbildungen. Jede Woche ein Exerzitium oder Extemporale. Herr Dr. Rinne.
4. **Religion.** 2 St. Erklärung der Sonntags-Perikopen. Das 2. und 3. Hauptstück wurden eingehend behandelt, das 4. und 5. gelernt. Ordnung des Kirchenjahres und des Gottesdienstes. Einprägung von Kirchenliedern. Herr Dr. Holtheuer.
5. **Geographie.** 2 St. Die außerdeutschen Länder Europas (S.) Deutschland (W.) Uebungen im Kartenzeichnen. Herr Haacke.
6. **Geschichte.** 2 St. Alte Geschichte, speziell Griechenlands bis zu den Diadochen und Roms bis auf die ersten Kaiser. Alte Geographie Griechenlands und Italiens. Herr Haacke.
7. **Naturgeschichte.** 2 St. Im S. System von Linné in allgemeinen Umrissen und Beschreibungen der wichtigsten Pflanzenspezies. Im W. Zoologie: Allgemeine Systematik, Repräsentanten aus den 4 ersten Klassen, nach Leunis, I. Theil. Herr Hanow.
8. **Mathematik.** 6 St. a) Geometrie (3 St.): Planimetrie bis zu den Parallelogrammen einschließlich (Kambly, §. 1. bis §. 80.) — b) Arithmetik (3 St.): Algebraische Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division; Proportionen. (Nach Hochheims Leitfaden für den Unterricht in der Arithmetik und Algebra Heft I., §. 1—59.) Zusammengesetzte Regeldetri, Zins-, Rabatt-, Prozent-, Gesellschaftsrechnung. Wiederholung der Rechnungen mit gewöhnlichen und Dezimal-Brüchen. Jede 1. und 3. Woche eine Arbeit. Herr Oberlehrer Günther.
9. **Schreiben.** 2 St. Deutsche und lateinische Schrift. Herr Berger.
10. **Zeichnen.** 2 St. Fortsetzung der Uebungen im Freihandzeichnen. Uebungen im geometrischen Zeichnen mit Zirkel und Lineal. Elemente der Perspektive. Konstruktionen. Herr Berger.

Quinta. Ordinarius: Herr Hanow.

1. **Deutsch.** 4 St. Eingehende Besprechung ausgewählter Sprachstücke des 4. Theiles des Lüben'schen Lesebuches. Lese-, Deklamier- und Diktierübungen. Wortbildungslehre und Satzlehre. Schriftliche Uebungen (Erzählungen und Beschreibungen.) Herr Haacke.
2. **Lateinisch.** 6 St. Wiederholung des Sexta-Pensums nebst Erweiterung durch die Einprägung der Ausnahmen und unregelmäßigen Bildungen. Präpositionen, Konjunktionen und unregelmäßige Verba. Aus der Syntax besondere Besprechung und Einübung der Konstruktionen des acc. c. inf. und des abl. abs. Mündliche und schriftliche Uebersetzungen aus dem Uebungsbuche von Spieß (I. Theil Cap. 14 bis 25. und ausgewählter Stücke des II. Theiles) nebst Einprägung der zugehörigen Vokabeln. Jede Woche ein Exerzitium oder Extemporale. Herr Dr. Rinne.
3. **Französisch.** 5 St. Mündliche und schriftliche Einübung der Lektionen 1—60 der Elementargrammatik von Plötz. Jede Woche ein Exerzitium oder ein Extemporale. Herr Hanow.
4. **Religion.** 3 St. Ausgewählte Geschichten des A. und N. T. Reihenfolge der biblischen Bücher. Die Festkreise. Eingehende Erklärung des 1. und 2. Hauptstücks nach Luthers Katechismus, Lernen des 3. mit kurzer Worterklärung. Einprägung von Kirchenliedern. Herr Dr. Rinne.
5. **Geographie und Geschichte.** 3 St. Hauptsachen aus der mathematischen Geographie. Wiederholung der Uebersicht von Asien, Amerika, Afrika und Australien. Geographie von Europa und speziell von Deutschland. Uebungen im Kartenzeichnen. — Biographische Darstellungen aus der mittlern und neuern — vorzüglich der deutschen und preußischen — Geschichte bis zu den Befreiungskriegen. Herr Hanow.
6. **Naturgeschichte.** 2 St. a) Botanik (S.): Erweiterung des Pensums von Sexta. b) Zoologie (W.): Die wichtigeren Säugethiere und Vögel. Herr Hanow.
7. **Rechnen.** 4 St. Bruchrechnung, Dezimalbrüche, einfache Regeldetri mit gewöhnlichen und Dezimalbrüchen. Im W. 1 St. geometrische Anschauungslehre. Alle 14 Tage eine Arbeit. Herr Hanow.
8. **Schreiben.** 2 St. Deutsche und lateinische Schrift. Herr Berger.
9. **Zeichnen.** 2 St. Fortsetzung der Uebungen des Sexta-Pensums, leichtere Uebungen im Schattieren u. s. w. Herr Berger.

Sexta. Ordinarius: Herr Schneider.

1. **Deutsch.** 4 St. Lese- und Diktierübungen. Besprechung ausgewählter Sprachstücke des 3. Theiles des Lüben'schen Lesebuches. Wortklassen. Einfacher Satz. Schriftliche Uebungen (Nachbildungen und Erzählungen.) Herr Schneider.
2. **Lateinisch.** 9 St. Nach der lateinischen Grammatik von Berger: Einübung der Deklinationen, der Substantiva, der Adjektiva nebst ihrer Komparation, der Formen von esse und posse, der Genusregeln, Pronomina, Zahlwörter und der regelmäßigen Konjugationen. Mündliche und schriftliche Uebersetzung aus dem Uebungsbuche von Spieß I. Theil Cap. 1—25. nebst Einprägung der zugehörigen Vokabeln. Jede Woche eine Arbeit. Hr. Haacke.
3. **Religion.** 3 St. Ausgewählte biblische Geschichten des A. und N. Testaments. Aus dem luth. Katechismus das 1. Hauptstück nebst kurzer Wort- und Sacherklärung, das 2. mit kurzer Worterklärung. Einprägung von Kirchenliedern. Herr Schneider.
4. **Geographie und Geschichte.** 3 St. An die Heimatskunde und anschauliche Besprechung der wichtigsten Begriffe der physikalischen Geographie schließt sich eine allgemeine Uebersicht der

Erdtheile, veranschaulicht durch Globus, Wandkarte und Mittheilung geographischer Charakterbilder. Im letzten Vierteljahre speziellere Behandlung der Länder und Staaten Europas. — Biographische Erzählungen aus der alten Geschichte. Herr Schneider.

5. **Naturgeschichte.** 2 St. Beschreibung der bekanntesten Pflanzen und Säugethiere, theils an vorhandenen Exemplaren, theils nach Abbildungen. Herr Hanow.

6. **Rechnen.** 5 St. Die vier Spezies in ganzen benannten Zahlen und Brüchen (gemeine und Dezimal-Brüche). Jede 4. Woche eine Klassenarbeit. Herr Schneider.

7. **Schreiben.** 3 St. Deutsche und lateinische Schrift. Herr Berger.

8. **Zeichnen.** 2 St. Uebungen im Zeichnen von geraden und krummen Linien, Maßen und Verbindungen, sodann Uebungen im Freihandzeichnen nach Dupuis'schen Drahtmodellen und nach Vorlagen von Hermes und Troschel. Hr. Berger.

Der Unterricht im **Gesange** wird in zwei Abtheilungen ertheilt. Die **zweite** Abtheilung umfasst die Schüler der Sexta und Quinta: Uebungen in der Tonleiter und Treffübungen. Einübung der wichtigsten Choräle und der bekanntesten Volks- und Vaterlandslieder. 1 St. — Die **erste** Abtheilung umfasst die Schüler der Quarta, Tertia und Sekunda: Belehrung über Noten, Schlüssel, Vorsetzungszeichen, Takt, Pausen u. s. f. Fortsetzung der Treffübungen u. s. w. Einübung der schwerern Choralmelodien und Erweiterung des Kreises der Volks- und Vaterlandslieder. 1 St. Herr Rocke.

Turnen. Die Schüler turnten in Riegen während des Sommers gemeinschaftlich zweimal wöchentlich je 1 St. Neben Frei- und Ordnungsübungen zu Anfang und am Schluß wechselten die Riegen mit Hang-, Stemm- und Sprunggeräthen, sowie mit Einübung von Reigen und Turnspielen. Herr Berger.

Die in den einzelnen Klassen nöthigen **Lehrbücher** sind:

1. Für den **deutschen** Sprachunterricht: Lesebuch für Bürgerschulen von A. Lüben und C. Nacke, und zwar in VI. der 3. Theil, in V. der 4. Theil, in IV. der 5. und in III. der 6. Theil; in V. und IV. Ergebnisse des grammatischen Unterrichts von A. Lüben. In II. die betreffenden Einzelausgaben der zu lesenden Schriftwerke.

2. Für den **lateinischen** Sprachunterricht: In VI.—II. Lateinische Grammatik von E. Berger; Uebungsbuch zum Uebersetzen von F. Spieß, Theil 1—4. In IV. Herodot von Weller. In III. und II. C. Julii Caesaris commentarii de bello gallico. In II. die Metamorphosen des P. Ovidius Naso und Sallustius: Catil.

3. Für den **französischen** Sprachunterricht: In V. und IV. Elementar-Grammatik der französischen Sprache von C. Plötz. In III. und II. Schul-Grammatik der französischen Sprache von C. Plötz. Lectures choisies von C. Plötz. Ein Wörterbuch, z. B. das von Thibaut.

4. Für den **englischen** Sprachunterricht: In III. Praktisches Lehrbuch der englischen Sprache von A. Baskerville. In II. Vollständiger Lehrgang der englischen Sprache von H. Plate, 2. Theil. — The British classical authors by L. Herrig. — Ein Wörterbuch, z. B. das von F. W. Thieme.

5. Für die **Religionslehre** außer der heiligen Schrift für alle Schüler in Klasse VI.—III. Dr. Martin Luthers kleiner Katechismus, Merseburg, im Verlage des Waisenhauses; Biblische Geschichte von L. E. Preuß; in II. Hilfsbuch für den evangelischen Religionsunterricht v. Noack.

6. Für den Unterricht in **Geographie und Geschichte:** In Klasse VI.—II. Leitfaden für den Unterricht in der Geographie von H. A. Daniel. In Klasse IV.—II. Grundriß der Weltgeschichte von Th. Dielitz; ein Schulatlas, z. B. der von Kiepert, oder von Lichtenstern und Lange, oder von Liebenow.

7. Für den Unterricht in den **Naturwissenschaften:** In IV., III. und II. Schulnaturgeschichte von F. Leunis 1., 2., und in II. auch 3. Theil. In II. Anfangsgründe der Physik von Koppe und der Grundriß der Chemie von Schreiber.

8. Für **Rechnen** und **Mathematik:** In VI. Aufgaben zum Zifferrechnen von E. Hentschel, 2. Heft, 1. Abtheilung. In V. Dasselbe 2. Heft, 2. Abtheilung. In IV. Aufgaben zu Uebungen im schriftlichen Rechnen von F. Scharlach. 5. Heft. In IV. und III. Hochheims Leitfaden für den Unterricht in der Arithmetik und Algebra, 1. Heft; in II. 2. Heft. In IV.—II. Die Elementar-Mathematik von L. Kambly, 2. Theil (Planimetrie); in II. dasselbe 3. und 4. Theil (Trigonometrie u. Stereometrie) und Vegas Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch, hrsgb. von J. A. Hülsse.

9. Für den Unterricht im **Gesang:** Das Delitzscher Gesangbuch. Choralbuch von H. Krause. Liederhain von E. Hentschel, 1—3. Heft.

Nach §. 2 des Reglements vom 6. Oktober 1859 (Ministerialblatt p. 263.) soll der Eintritt in die Sexta in der Regel nicht vor dem vollendeten 9. Lebensjahre erfolgen. Anderseits dürfen aber auch die Schüler nicht in allzu vorgerücktem Alter der Anstalt zugeführt werden, wenn sich ihnen nicht vorher Gelegenheit geboten hat, durch Privatunterricht zumal in der lateinischen und französischen Sprache die Reife zur Aufnahme in eine höhere Klasse zu erlangen. Das beste Alter ist das vollendete 9. resp. 10. Lebensjahr.

Die zur Aufnahme in die Sexta erforderlichen elementaren Kenntnisse und Fertigkeiten sind: Geläufigkeit im Lesen deutscher und lateinischer Druckschrift; eine leserliche und reinliche Handschrift; Fertigkeit, Diktiertes ohne grobe orthographische Fehler nachzuschreiben; Sicherheit in den vier Grundrechnungsarten mit gleichbenannten Zahlen. In der Religion wird einige Bekanntschaft mit den Geschichten des Alten und Neuen Testaments, sowie (bei den evangelischen Schülern) mit Bibelsprüchen und Liederversen erfordert.

2. Vertheilung der Lehrfächer unter die Lehrer.

Lehrer.	Sekunda. St.	Tertia. St.	Quarta. St.	Quinta. St.	Sexta. St.	Summa.
1. Rektor **Kayser**, Ordinarius von Sekunda.	4 Französisch. 3 Englisch.	4 Französisch. 4 Englisch.				15
2. Oberl. **Günther**, Ordinarius von Tertia.	5 Mathematik. 2 Physik. 2 Mineralogie.	6 Mathematik.	6 Mathematik.			21
3. Dr. **Holtheuer**, Ordinarius von Quarta.	3 Deutsch. 4 Lateinisch. 2 Religion.	2 Religion.	3 Deutsch. 6 Lateinisch. 2 Religion.			22
4. **Hanow**, Ordinarius von Quinta.	2 Naturgesch.	2 Naturgesch.	2 Naturgesch.	5 Französisch. 3 Geographie u Geschichte. 2 Naturgesch. 4 Rechnen.	2 Naturgesch.	22
5. Dr. **Rinne**.		3 Deutsch. 5 Lateinisch.	5 Französisch.	6 Lateinisch. 3 Religion.		22
6. **Haacke**.	1 Geographie. 2 Geschichte.	2 Geographie. 2 Geschichte.	2 Geographie 2 Geschichte.	4 Deutsch.	9 Lateinisch.	24
7. **Schneider**, Ordinarius von Sexta.					4 Deutsch. 3 Religion. 3 Geographie u. Geschichte. 5 Rechnen.	15
8. **Berger**, Zeichen- und Turnlehrer.	2 Zeichnen.	2 Zeichnen.	2 Zeichnen. 2 Schreiben.	2 Zeichnen. 2 Schreiben.	2 Zeichnen. 3 Schreiben.	17
9. **Rocke**, Lehrer der Vorschule.	1 Gesang.	1 Gesang.	1 Gesang.	1 Gesang.	1 Gesang.	2
	33	33	33	32	32	160

B. Einrichtungen der Anstalt.

1. Tagesordnung der Schüler:

a.) **Sommerhalbjahr:** An den Wochentagen früh von 7—11 Uhr Schulunterricht, von 11—12 Uhr Arbeitszeit, von 12—2 Uhr Freizeit, von 2—4 nachmittags Schulunterricht, von 4—7 Uhr Freizeit, von 7—9 Uhr Arbeitszeit. An den Mittwoch und Sonnabend Nachmittagen finden folgende Abweichungen statt: von 11—2 Uhr ist Freizeit, von 2—4 Uhr Arbeitszeit, von 4—7 Uhr wiederum Freizeit und von 7—9 Uhr Arbeitszeit. — An den Sonntagen ist von 8—9 Uhr früh Arbeitszeit, darauf Besuch der Kirche — abwechselnd alle 14 Tage unter Aufsicht der Lehrer entweder die Schüler der Sekunda, Tertia und Quarta oder die der Quinta und Sexta — oder stille Beschäftigung zu Hause bis 11 Uhr; von 11—6 Uhr abends Freizeit, von 6—9 Uhr Arbeitszeit. Während des Hochsommers ist an den Nachmittagen des Montags, Dienstags, Donnerstags und Freitags von 4½—7 Uhr Arbeitszeit, von 7—9 Uhr Freizeit, an denen des Mittwochs und Sonnabends von 2—6 Uhr Arbeitszeit und 6—9 Uhr Freizeit und an den Sonntagsnachmittagen von 2—4 Uhr Arbeitszeit und von 4—9 Uhr Freizeit.

b.) **Winterhalbjahr:** Am Montag, Dienstag, Donnerstag und Freitag ist früh von 8—12 Uhr Schulunterricht, von 12—2 Uhr Freizeit, von 2—4 Uhr Schulunterricht, von 4—6 Uhr Freizeit, von 6—9 Uhr abends Arbeitszeit. Mittwochs und Sonnabends ist ebenfalls von 8—12 Uhr Schulunterricht, dagegen von 12—5 Uhr Freizeit und von 5—9 Uhr Arbeitszeit. An den Sonntagen ist von 8—9 Uhr früh Arbeitszeit, von 9—11 Uhr Besuch der Kirche, bez. stille Beschäftigung zu Hause, von 11 Uhr vormittags bis 5 Uhr nachmittags Freizeit, von 5—9 Uhr abends Arbeitszeit.

Die Vertheilung der Inspektion der Schüler während der Arbeitszeit unter die Lehrer wird beim Beginn eines jeden Schuljahres neu geordnet.

2. Von den Lehrern im nächsten Schuljahre zu korrigierende schriftliche Arbeiten und deren Fristen.

	Tag der Aufgabe	Tag der Abgabe.
Sexta.		
1) **Deutsch**: Wöchentlich ein Diktat u. statt dessen von 3 zu 3 Wochen eine Uebung	Donnerstag.	Montag.
2) **Lateinisch**: Jede Woche ein Exerzitium oder Extemporale	Montag.	Dienstag
3) **Rechnen**: Jede 4. Woche eine Klassenarbeit.		
Quinta.		
1) **Deutsch**: Wöchentlich ein Diktat und statt dessen jede 4. Woche des Arbeitsmonats eine Uebung.	Dienstag.	Freitag.
2) **Lateinisch**: Jede Woche ein Exerzitium oder Extemporale	Dienstag.	Mittwoch.
3) **Französisch**: Desgl.	Sonnabend.	Montag.
4) **Rechnen**: Jede 1. und 3. Arbeitswoche eine Arbeit	Montag.	Donnerstag.
Quarta.		
1) **Deutsch**: Von 3 zu 3 Wochen eine Uebung	Sonnabend d. 1., bez. 4., 7. u. s. w. W.	Montag d. zweitnächst. Woche.

	Tag der Aufgabe	Tag der Abgabe.
2) **Lateinisch:** Jede Woche ein Exerzitium oder Extemporale	Montag.	Mittwoch.
3) **Französisch:** Desgl.	Sonnabend.	Dienstag.
4) **Mathematik:** Jede 1. und 3. Woche eine Arbeit	Dienstag.	Sonnabend.
Tertia.		
1) **Deutsch:** Alle 3 Wochen ein Aufsatz	Sonnabend der 1. u. s. w. Woche.	Freitag der 2. u. s. w. W.
2) **Lateinisch:** Jede 1. und 3. Woche ein Exerzitium oder Extemporale	Montag.	Donnerstag.
3) **Französisch:** Jede 2. und 4. " " " " "	Freitag.	Mittwoch.
4) **Englisch:** Jede 1. und 3. " " " " "	Donnerstag.	Sonnabend.
5) **Mathematik:** Jede 2. und 4. Woche eine Arbeit	Freitag.	Donnerstag.
Sekunda.		
1) **Deutsch:** Jede 4. Woche ein Aufsatz	Sonnabend der 3. Woche.	Montag der zweitn. Woche
2) **Lateinisch:** Jede 2. und 4. Woche ein Exerzitium oder Extemporale	Donnerstag.	Dienstag.
3) **Französisch:** Jede 1. und 3. " " " " "	Dienstag.	Donnerstag.
4) **Englisch:** Jede 2. und 4. " " " " "	"	"
5) **Mathematik:** Außer Extemporalien nach Bedürfniß jede 3. Woche des Monats eine häusl. Arbeit	Sonnabend.	Zweitnächsten Sonnabend.

C. Verfügungen der vorgesetzten Behörden.

Unter den Verfügungen der vorgesetzten Behörden, die während des letzten Schuljahres der Anstalt zugingen, ist von allgemeinerem Interesse ein Ministerialreskript vom 30. Juni 1876, nach welchem Schüler, die von einer Anstalt auf eine andere gleicher Art mit gleichberechtigten Klassen übergehen, auf der neuen Schule in diejenigen Klassen gesetzt werden müssen, in denen sie auf der zuletzt besuchten Anstalt gesessen haben, bez. in welche sie dort versetzt worden sind.

D. Chronik.

Am 20. April: Aufnahmeprüfung.

Am 21. April: Eröffnung des Schuljahres.

Der allgemeine Schulspaziergang beschränkte sich in diesem Jahre auf einen Nachmittag.

Einer allgemeinen patriotischen Feier wegen fiel am 2. September der Unterricht aus. Die Rede bei dem in der Schule stattfindenden Theile der Feier hielt Herr Oberlehrer Günther.

Am 17. November begingen Lehrer und Schüler gemeinschaftlich die Feier des heiligen Abendmahls.

An dem Tage der Wahl der Wahlmänner wurde der Vormittagsunterricht ausgesetzt, an dem Tage der Wahl zum Reichstage, zu welcher die Aula benutzt wurde, fiel der Unterricht von 10 Uhr ab aus.

Vom 12. bis zum 16. Februar fand die schriftliche Abgangsprüfung statt. Die in derselben bearbeiteten Aufgaben waren:

I.) ein deutscher Aufsatz: Das Alter soll man ehren.
II. — IV.) ein lateinisches, ein französisches und ein englisches Extemporale.
V.) eine mathematische Arbeit:
1.) Ueber einer gegebenen Linie als Hypotenuse ein rechtwinkliges Dreieck zu zeichnen, in welchem eine Kathete gleich der Projektion der andern auf die Hypotenuse ist.
2.) Von einem Dreieck ist gegeben eine Seite, die Summe der Quadrate der beiden andern Seiten und der von letztern eingeschlossene Winkel. Das Dreieck zu berechnen. [$a = 37^m$; $b^2 + c^2 = 1769^{Qm}$; $\alpha = 67^0\ 22'\ 48,5''$]
3.) Eine Thurmspitze, welche eine achtseitige gleichförmige Pyramide von 7^m Höhe bildet, deren Grundkante $1\frac{3}{4}^m$ misst, soll mit Kupferblech beschlagen werden. Wie groß wird der Werth sein, wenn ein Quadratmeter dieser Deckung 30 Mark kostet?
4.) Die Summe von drei Zahlen, welche eine geometrische Reihe bilden, ist 637; das Produkt aus der mittlern in die Summe der beiden äußern = 36162. Wie heißen die Zahlen?

Der mündlichen Prüfung, welche unter dem Vorsitz des Herrn Provinzialschulrath Dr. Göbel aus Magdeburg am 16. März stattfand, hatte sich nur der Abiturient Reinhold Büchner aus Holzweißig zu unterziehen, während die Abiturienten Paul Platen aus Delitzsch und Paul Roßke aus Klepzig auf Grund des Ausfalls der schriftlichen Prüfung und auf Grund ihrer Klassenleistungen von derselben entbunden wurden. Die letztern beiden erhielten das Prädikat „gut bestanden", Büchner, welcher das Examen gleichfalls bestand, die Zensur „genügend".

Am 22. März wird in üblicher Weise die Feier des Geburtstags Sr. Majestät des Kaisers und Königs stattfinden, bei welcher Herr Hanow die Rede halten wird.

Am Schluß des Schuljahres wird Herr Dr. Holtheuer unsre Anstalt, welcher er seit Michaelis 1873 angehört, verlassen, um an die Realschule I. O. in Aschersleben überzugehen. Unsre Schule wird die Verdienste, die er sich durch seine geschickte und erfolgreiche Wirksamkeit um sie erworben hat, in dankbarer Erinnerung behalten. In Folge seines Weggangs wird Herr cand. min. Matthies, gegenwärtig in Magdeburg, in das Lehrerkollegium eintreten.

E. Statistische Verhältnisse der Anstalt.

I. Frequenz.

1. Zahl der Schüler überhaupt, sowie der abgegangenen und aufgenommenen.

a) Höhere Bürgerschule.

Zahl der Schüler im Winterhalbjahr 18 75/76.	Abgang bis Ostern 1876.	Zugang Ostern 1876.	Zahl der Schüler im Sommerhalbjahr 1876.					
			II.	III.	IV.	V.	VI.	Summa.
147	32	47	15	19	32	41	57	164

Zahl der Schüler im Sommerhalbjahr 1876.	Abgang bis Michaelis.	Zugang Michaelis.	Zahl der Schüler im Winterhalbjahr 18 76/77.					
			II.	III.	IV.	V.	VI.	Summa.
164	12	2	13	18	28	40	55	154

b) Vorschule.

Zahl der Schüler im Winterhalbjahr 18⁷⁵⁄₇₆.	Abgang bis Ostern 1876.	Zugang Ostern 1876.	Zahl der Schüler im Sommerhalbjahr 1876.		
			1. Klasse.	2. Klasse.	Summa.
73	27	25	37	36	73

Zahl der Schüler im Sommerhalbjahr 1876.	Abgang bis Michaelis.	Zugang Michaelis.	Zahl der Schüler im Winterhalbjahr 18⁷⁶⁄₇₇.		
			1. Klasse.	2. Klasse.	Summa.
73	2	1	36	36	72

2. Verzeichnis der Schüler, welche abgegangen sind.

A. Verzeichnis der Ostern 1876 mit dem Zeugnis der Reife entlassenen Schüler:

Namen.	Geburtsort.	Stand des Vaters.	Konf.	Alter.	Schulzeit überhaupt.	Schulzeit in Sekunda.	Gewählter Beruf.
Gustav Bley	Sandersdorf bei Bitterfeld.	Gutsbesitzer.	evang.	$19\frac{3}{4}$ Jahr.	5 Jahr	2 Jahr	Supernumerariat.
Friedrich Messerschmidt	Wittenberg.	Kreisgerichtskassenkontroleur (†).	„	$16\frac{1}{2}$ „	8 „	2 „	„
Paul Voigt	Pritzerbe bei Brandenburg.	Maurermstr.	„	$19\frac{1}{4}$ „	7 „	2 „	Postfach.
Franz Schmeil	Quering bei Delitzsch.	Gutsbesitzer.	„	$16\frac{3}{4}$ „	6 „	2 „	Eisenbahndienst.
Otto Bergmann	Wiesenena Kreis Delitzsch.	„	„	$17\frac{1}{2}$ „	6 „	2 „	Supernumerariat.

B. Mit dem Zeugnis behufs der Meldung zum einjährig-freiwilligen Militärdienste gingen ab
Ostern 1876: Hugo Horn aus Zaasch bei Delitzsch, Hermann Rose aus Delitzsch, Karl Kersten aus Bröfa bei Düben.
Michaelis 1876: Amandus Peter aus Rietschütz bei Schwiebus.

C. Außerdem verließen die Anstalt:

a) Ostern 1876: aus III.: Max Schönbrodt, Friedrich Schumann, Max Hübnel, Franz Haage; aus IV.: Rudolf Fleischer, Adolf von Schultes, Louis Peter, Franz Lampe, Paul Zwanzig, Georg Polko, Oskar Schimpf, Richard Bier, Wilhelm Köppe, Paul Röthing; aus V.: Louis Genscher, Otto Bettmann, Max Kräger, Hermann Werner, Oswald Ziegler, Richard Merkel; aus VI.: Max Keil, August Rathmann.

b) während des Sommerhalbjahres 1876: aus III.: Erich Walter; aus IV.: Hermann Thauer, August Hanke, Otto Steinberg, Paul Peter; aus V.: Otto Täubert, Leopold Rosenthal; aus VI.: Max Rosenthal, Adolf Keil; aus der 1. Vorschulklasse: Werner Hildebrandt, Louis Wolffohn.

c) während des Winterhalbjahres $18\frac{76}{77}$: aus III.: Hermann Jakob; aus IV.: Richard Wolf; aus V.: Karl Frey; aus VI.: Gustav Frey; aus der 2. Vorschulklasse: Gotthelf Arnheim.

Durch den Tod verlor die Anstalt einen Schüler der Sexta, Oswald Holzweißig aus Rackwitz, welcher schon drei Tage nach seiner Aufnahme starb, und zwei Schüler der Vorschule, Karl Sommer aus Kösen und Max Jenke von hier, zwei artige und fleißige Knaben.

Verzeichnis der Schüler während des Schuljahres $18\frac{76}{77}$.

A. Höhere Bürgerschule.

Name.	Wohnort der Eltern.	Name.	Wohnort der Eltern.
1) Secunda.		Spott Robert	Delitzsch.
Ordn. I.		Messerschmidt Ernst	„
Rose Hermann	Delitzsch.	Kunze Max	„
Platen Paul	„	Mertwitz Max	„
Roßke Paul	Klepzig.	Werner Otto	„
Büchner Reinhold	Beyersdorf.	Rößler Robert	„
Kleeberg August	Holzweißig.	**3) Quarta.**	
Peter Amandus	Delitzsch.	Laue Konrad	Delitzsch.
Ordn. II.		Trinius Martin	„
Hädicke Max	Schmiedeberg.	Schimpf Theodor	„
Richter Ernst	Delitzsch.	Voigt Louis	Bösewig b. Pretzsch.
Elschner Otto	Sitzenroda.	Werner Richard	Delitzsch.
Bley Richard	Schladitz b. Zwochau	Scharr Konrad	Werbelin.
Offenhauer Adolf	Delitzsch.	Fritzsche Wilhelm	Delitzsch.
Heßler Ludwig	Wartenburg.	Eberhardt Arthur	Gerbisdorf.
Tornau Otto	Delitzsch.	Krause Franz	Delitzsch.
Ufer Paul	„	Rausch Otto	Düben.
Jost Hugo	Düben.	Messerschmidt Paul	Delitzsch.
2) Tertia.		Richter August	„
Walter Erich	Zörbig.	Felix Viktor	„
Hermann Karl	Zeitz.	Schönknecht Richard	„
Hofmann Otto	Delitzsch.	Jakob August	„
Jakob Hermann	„	Rathmann Oswald	„
Böttcher Bruno	„	Zenker Robert	„
Kuhne Oswald	Hohenroda.	Spott Moritz	„
Braune Eugen	Delitzsch.	Kegler Franz	Wolfen b. Bitterfeld.
Rose Otto	„	Diedicke Hermann	Delitzsch.
Starckloff Paul	„	Heymer Ernst	Torgau.
Petersohn Alwin	Prettin.	Wolf Richard	Dommitzsch.
Hennig Ernst	Quering.	Friedewald Ernst	Delitzsch.
Baron Karl	Delitzsch.	Thauer Hermann	Bitterfeld.
Fiedler Otto	Quering.	Kluge Louis	Zscherndorf.

Die mit einem * versehenen Namen sind die Namen der im Laufe des Schuljahres $18\frac{76}{77}$ aufgenommenen Schüler.

Name.	Wohnort der Eltern.	Name.	Wohnort der Eltern.
Müller Wilhelm	Döbernitz.	Berger Adalbert	Delitzsch.
Hanke August	Delitzsch.	Donath Robert	"
Rose Reinhold	"	Schumann Paul	"
Steinberg Otto	Reibitz.	Schumann Otto	"
Peter Paul	Delitzsch.	*Schneider Rudolf	Kurz-Lipsdorf b. Zahna.
Krause Paul	"	*Gödicke Eugen	Delitzsch.
*Grahl Paul	Schwemsal.	*Schlobach Oskar	Ateriz b. Kemberg.
4) Quinta.		*Schlobach Otto	Neue Mühle b. Kemberg
Winkler Otto	Kl. Lissa.	*Müller Fritz	Delitzsch.
Meyner Richard	Delitzsch.	*Golde Adolf	Wittenberg.
Eichler Paul	"	**5) Sexta.**	
Täubert Otto	Arnstedt.	Romanus Richard	Burgkemnitz.
Hauffe Konrad	Werbelin.	Hühnel Adolf	Delitzsch.
Lampe Hermann	Delitzsch.	Rosenthal Max	Karlskrona.
Schaaf Otto	Emsdorf.	Hildebrandt Franz	Schlaitz.
Felix Albert	Delitzsch.	Seling Adalbert	Crensitz.
Pusch Ferdinand	Schmerz b. Gräfenh.	Jenke Ernst	Delitzsch.
Scharf Alwin	Klitzschmar.	Fuhrmann Oswald	"
Brömme Reinhold	Hohenleina.	Schultz Franz	"
von Schütz Hugo	Lindenhain.	Tiemann Paul	"
Stieme Karl	Delitzsch.	Pörschmann Julius	"
Lehmann Georg	Ziegelroda.	Oehlert Karl	"
Schumann Robert	Delitzsch.	Bier Albert	"
Erbe Hermann	"	Hänsch Bruno	"
Rathmann Otto	"	Trebeljahr Wilhelm	Durchwehna.
Schladebach Karl	"	Knötzsch Bernhard	Delitzsch.
Hanke Robert	"	Hennig Max	"
Rosenthal Leopold	Karlskrona.	Keil Adolf	"
Hennig Bruno	Delitzsch.	Prinz Paul	"
Neuendorf Franz	"	Rühl Oswald	Selben.
Stansch Hermann	Elberitzmühle b. Del.	Wittig Oskar	Delitzsch.
Schimpf Bernhard	Delitzsch.	Kluge Albert	Zscherndorf.
Marschner Paul	Pouch.	Wittig Arthur	Delitzsch.
Gleitsmann Leopold	Delitzsch.	Nesse Adolf	"
Friedrich Robert	"	Fritzsche Paul	"
Braune Julius	"	Grußdorf Moritz	Jösigk.
Hildebrandt Ernst	Sackwitz.	Beyer Hermann	Delitzsch.
Frey Karl	Delitzsch.	Bergmann Max	"
Wagner Otto	"	Diedicke Otto	"
Richter Max	Gerlebock.	Werner Alfred	"
Ebelt William	Landsberg.	Frey Gustav	"

Name.	Wohnort der Eltern.	Name.	Wohnort der Eltern.
Spangenberg Louis	Delitzsch.	*Fiedler Oskar	Glebitzsch b. Roitzsch.
Hühnel Paul	=	*Fiedler Otto	=
Albrecht Theodor	=	*Dorn Max	Gertitz.
Hanke Georg	=	*Ebelt Bernhard	Kölsa.
Erbe Gustav	=	*Merkwitz Franz	Poßdorf.
Schönbrodt Oskar	Kl.=Wiedemar.	*Hinkefuß Gustav	Schenkenberg.
Klöckner Adolf	Delitzsch.	*Winkler Ferdinand	Poßdorf.
Petzsche Arthur	Grabschütz.	*Stallbaum Albert	Wiesenena.
Tiemann Hans	Delitzsch.	*Holzweißig Oswald	Rackwitz.
*Crucius Max	Schmiedeberg.	*Schöley Rudolf	Niederossig.
*Schlobach Robert	Ateriz b. Kemberg.	*Weißenseel Adolf	Delitzsch.
*Nitzschke Bruno	Kapphahnmühle b. Kemberg.	*Wolfermann Otto	=
*Kober Karl	Sausedlitz.	*Scharf Emil	Glebitzsch.
*Winter Alfred	Zaasch.	*Berthold Robert	Bitterfeld.

B. Vorschule.

Erste Klasse.

Böttcher Hermann	Delitzsch.
Weiser Louis	=
Schmidt Paul	=
Kalisch Richard	=
Messerschmidt Richard	=
Sommer Karl	Kösen.
Dittmar Richard	Delitzsch.
Richter Oskar	=
Schulze Paul	=
Rausch Max	=
Schreyer Hugo	=
Meister Max	=
Kittel Hugo	=
Hoffmann Karl	=
Donner Gustav	Kl.=Wölkau.
Karbaum Max	Delitzsch.
Gödel Rudolf	=
Bretschneider Max	=
Gerold Paul	=
Richter Paul	=
Müller Paul	=
Offenhauer Robert	=
Werner Alwin	=
Wittig Oskar	=
Schimpf Friedrich	Delitzsch.
Hildebrandt Werner	=
Rosch Paul	=
Riehl Karl	=
Wolfsohn Louis	=
Schultz Richard	=
Ritter Fritz	=
*Schöttge Karl	Schenkenberg.
*Heinze Oskar	Delitzsch.
*Winter Bruno	Zaasch.
*Eichler Richard	Delitzsch.
*Jummel Reinhold	Benndorf.
*Jummel Richard	=
*Förster Gustav	Holzdorf.

Zweite Klasse.

Ordn. I.

Arnheim Gotthelf	Delitzsch.
Hammer Adolf	=
Braune Wilhelm	=
Keller Bernhard	=
Offenhauer Paul	=
Donath Oswald	=
Schaaf Rudolf	=
Große Otto	=
Jenke Max	=

Name.	Wohnort der Eltern.	Name.	Wohnort der Eltern.
Fechner Willy	Delitzsch.	*Donner Emil	Kl.-Wölkau.
Schultz Paul	=	*Kittel Wilhelm	Delitzsch.
Messerschmidt Oswald	=	*Schönbrodt Wilibald	=
Gerold Otto	=	*Dörfel Paul	=
Jakob Reinhold	=	*Wittig Alwin	=
Wolf Karl	=	*Ronniger Hermann	=
*Krieg Walter	=	*Schulze Ernst	=
*Rocke Paul	=	*Wittig Bruno	=
*Almus Fritz	=	*Baumgärtel Max	=
Ordn. II.		*Werner Bruno	=
*Wolf Leopold	Delitzsch.	*Fänder Richard	=
*Hanke Hermann	=	*Erzinger Moritz	=
*Rausch Maximilian	=	*Hammer Paul	=
*George Arthur	=	*Diedicke Richard	=

II. Lehrmittel.

A. Die zur Vergrößerung der **Lehrerbibliothek** ausgeworfene Summe wurde zum größten Theile durch den Weiterbezug periodischer Zeitschriften und durch Ankauf der Fortsetzungen früher angeschaffter Werke verbraucht.

B. Für die **Schülerbibliothek** wurde aus den üblichen Geldbeiträgen der Schüler eine Anzahl Jugendschriften angekauft.

C. Für das **physikalisch-chemische Kabinett** wurden angekauft: eine Influenzmaschine mit Zubehör; ein Wasserhammer; ein galvanoplastischer Apparat; ein elektromagnetischer Bewegungsapparat; drei Geißlersche Röhren; ein Thermometer nach Celsius; eine Leydener Flasche.

Zu Zwecken des **naturgeschichtlichen** sowie des **geographisch-geschichtlichen** Unterrichts wurden angekauft: Types principaux des différentes races humaines dans les cinq parties du monde modelés sous la direction du prof. Baer de St. Pétersbourg.

Geschenkt erhielt die Anstalt vom Herrn Rittergutsbesitzer Schirmer auf Neuhaus eine Fischotter, vom Herrn Fabrikanten Rud. Tiemann hier einen ausgestopften Reiher, wofür den geehrten Herren Gebern auch an dieser Stelle der Berichterstatter im Namen der Schule besten Dank sagt.

Der Schluß des gegenwärtigen Schuljahres wird

Sonnabend, den 24. März, mittags

mit der Vertheilung der Zensuren und Versetzung der Schüler erfolgen. Das Schuljahr 18$\frac{77}{78}$ beginnt

Dienstag, den 10. April, 7 Uhr morgens.

Montag, den 9. April, 9 Uhr vormittags, findet die **Aufnahme-Prüfung** statt.

Delitzsch, im März 1877.

Kayser, Rektor.