Programm

zu der am 1., 2. und 3. April 1852 zu haltenden

Prüfung der Schüler

der

K. Gewerb- und Baugewerkenschule

zu Chemnitz.

Descriptive Lösung des Problems der um- und eingeschriebenen Kugel eines Tetraëders.

Von

Prof. Dr. Heinrich v. Bünau.

Nachrichten über die Gewerb- und Baugewerkenschule

von

Prof. Dr. G. H. E. Schnedermann,
Director.

Mit zwei lithographirten Tafeln.

Leipzig,
Druck von F. A. Brockhaus.

Programm

zu der am 1., 2. und 3. April 1852 zu haltenden

Prüfung der Schüler

der

K. Gewerb- und Baugewerkenschule

zu Chemnitz.

Descriptive Lösung des Problems der um- und eingeschriebenen Kugel eines Tetraëders

von

Prof. Dr. **Heinrich v. Bünau.**

Nachrichten über die Gewerb- und Baugewerkenschule

von

Prof. Dr. **G. H. E. Schnedermann,**

Director.

Mit zwei lithographirten Tafeln.

Leipzig,

Druck von F. A. Brockhaus.

Descriptive Lösung des Problems der um- und eingeschriebenen Kugel eines Tetraëders.

Die vorliegenden Blätter sind einer Aufgabe der descriptiven Geometrie gewidmet, welche die graphische Darstellung der um- und eingeschriebenen Kugel eines gegebenen Tetraëders im Raume betrifft.

Ihre Lösung erheischt die Anwendung einer Folge bemerkenswerther, der Theorie der geraden Linie und der Ebene im Raume angehöriger Sätze, und dürfte als ein Beitrag zur Darlegung des Verfahrens der descriptiven Geometrie, bei der Lösung ihrer Aufgaben, zu betrachten sein.

Dieser, durch Monge zur Selbständigkeit erhobene Theil der Mathematik, der die Darlegung der Methoden zum Gegenstande hat, wodurch solche Aufgaben, welche die drei Dimensionen des Raumes betreffen, auf Constructionen in einer Ebene zurückgeführt werden können, fand in den Bildungsstätten für die Technik einen so lebhaften Anklang, daß es überflüssig erscheinen würde, seinen Werth anzupreisen. Die descriptive Geometrie hat sich bei den meisten gewerblichen Lehranstalten Deutschlands eingebürgert, und man räumte ihr um so williger einen Platz ein, als sehr bald an den Tag trat, wie sie besonders das Studium auch anderer die Raumgebilde umfassender Zweige des mathematischen Wissens, zu fördern geeignet sei.

Als ein freudiges Ereigniß erschien daher die, seit Ostern des vorigen Jahres erfolgte Anreihung der descriptiven Geometrie an die Lehrgegenstände der hiesigen königl. Gewerbschule, und dies um so mehr, da sie ein lange gefühltes Bedürfniß gewesen war.

Die Ausführung des Cursus geschah nach einem vorher entworfenen Plane. Einer, die Theorie der Ebene und geraden Linie im Raume umfassenden Einleitung folgte die erste, von der geraden Linie und Ebene im Raume handelnde Abtheilung der descriptiven Geometrie. In der zweiten Abtheilung fanden die krummen Oberflächen und die Berührungsebenen, in der dritten die krummen Linien mit ihren Tangenten Erledigung, sowie endlich aus der vierten, eine Sammlung von Uebungen enthaltenden Abtheilung, je nach Bedarf, das zur Erläuterung des Vortrags Erforderliche geschöpft wurde.*).

§ 1.

Aufgabe I.

Die umschriebene Kugel eines gegebenen Tetraëders darzustellen.

Auflösung.

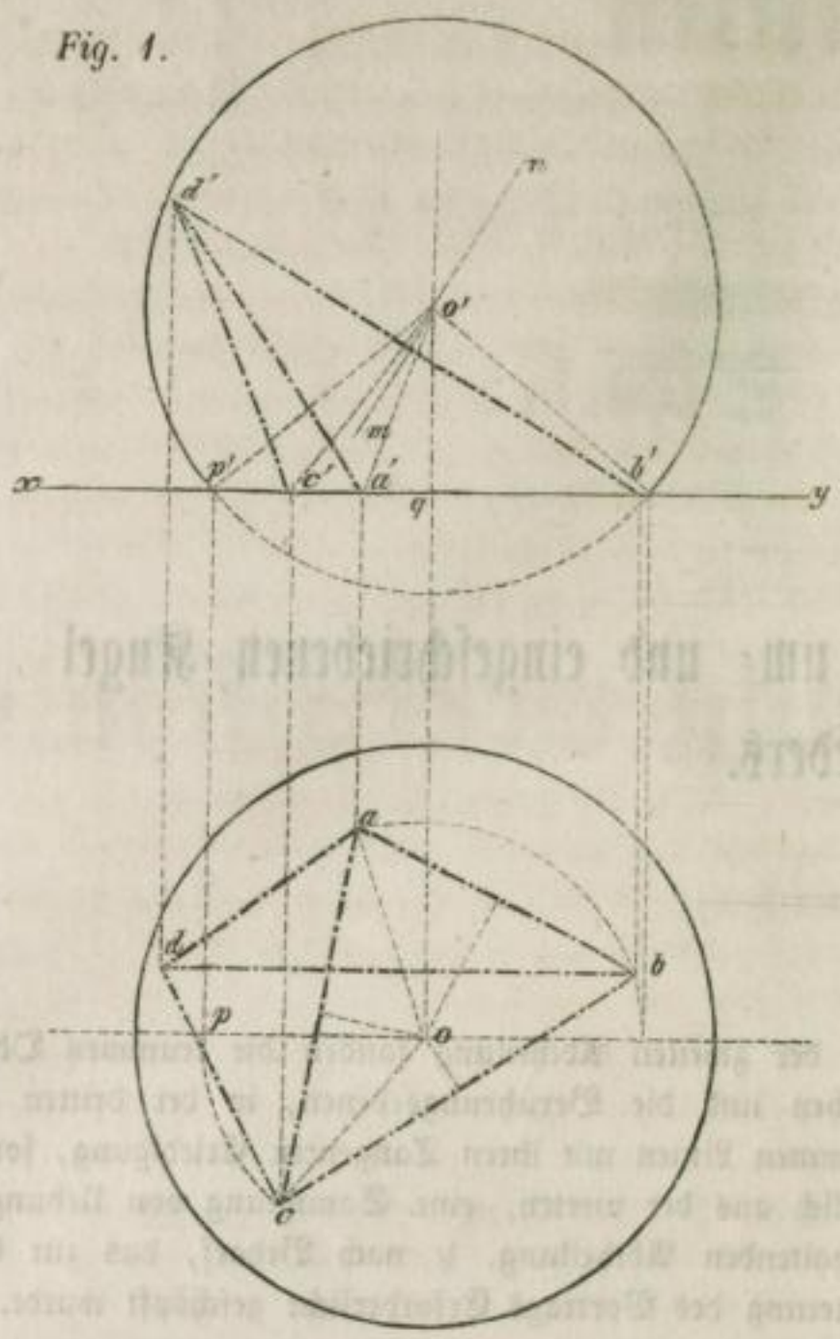
Die Forderung beschränkt sich darauf, den Mittelpunkt und den Halbmesser der Kugel zu finden. Da der Mittelpunkt der Kugel von den vier Eckpunkten des Tetraëders einerlei Abstand haben muß, so folgt, daß er im Durchschnitte der, in den Mitten der Kanten zu denselben perpendiculär geführten Ebenen gelegen ist.

Offenbar reichen schon drei dieser Ebenen hin, sobald sie durch die Mittelpunkte solcher Kanten des Tetraëders gehen, welche nicht die Grenzen der nämlichen Seite sind.

Von selbst geht hieraus die Folgeordnung der zu vollbringenden Constructionen hervor, die um so einfacher erscheinen werden, je mehr es gestattet ist, den Projectionsebenen besondere Lagen in Bezug auf das Tetraëder zu ertheilen.

*) Es ist dies der in meiner deutschen Bearbeitung des Lehrbuches der descriptiven Geometrie von Lefebure de Fourcy gewählte Unterrichtsgang. Das Buch erschien bei Bruno Gödsche, Chemnitz und Schneeberg, 1845.

Fig. 1.



Angenommen, die horizontale Projectionsebene falle mit einer der Seiten des Tetraëders, etwa mit a b c [Fig. 1], zusammen, und es sei die vertikale Projectionsebene der Tetraëderkante [b d, b′ d′] parallel gewählt worden. Hiernach stellt a b c d die horizontale, a′ b′ c′ d′ die vertikale Projection des gegebenen Tetraëders dar. Werden aus den Mitten der Seiten des Dreieckes a b c Perpendikel gefällt, welche in der Ebene dieses Dreieckes gelegen sind, so schneiden sich solche in einem einzigen Punkte o. Es sind diese drei Perpendikel die horizontalen Tracen der, zu den Kanten [a b, a′ b′], [a c, a′ c′], [b c, b′ c′] in ihren Mitten perpendikulären Ebenen. Dieselben haben die in o horizontal projicirte Vertikale zum gemeinschaftlichen, den Mittelpunkt der umschriebenen Kugel enthaltenden Durchschnitt. Daher zeigt o schon die horizontale Projection dieses Mittelpunktes an.

Behufs der Bestimmung der Vertikalprojection desselben weiß man, daß diese in der Projectionslinie o o′ liegen muß. Andrerseits bedarf es nur noch eines Perpendikels m n zu b′ d′ in deren Mitte, um sogleich, im Durchschnitt o′ von m n und o o′, die vertikale Projection des Kugelmittelpunktes dargestellt zu haben. Denn m n ist die vertikale Trace der, durch den Mittelpunkt der Kante [b d, b′ d′] zu dieser perpendikulär gedachten Ebene, und in derselben Trace, wie leicht einzusehen, die Vertikalprojection des Mittelpunktes der geforderten Kugel gelegen; folglich ist dieser Punkt bestimmt.

§ 2.

Behufs der Darstellung des Halbmessers der Kugel ziehe man die Projectionen o c, o′ c′ eines derselben, und finde hieraus seine wahre Größe. Im Raume ist dieser Halbmesser die Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreieckes, das o c zur horizontalen und den, auf o′ q in wahrer Größe vertikal projicirten Abstand des Mittelpunktes von der horizontalen Projectionsebene zur vertikalen Kathete hat. Um letztere werde die Ebene des Dreieckes gedreht, bis zum Parallelsein zur vertikalen Projectionsebene, dergestalt, daß c nach p in die, zu x y parallele, die horizontale Trace der Ebene jenes Dreieckes in seiner neuen Lage darstellende Gerade o p gelangt; worauf der Punkt c im Durchschnitt p′ der Projectionslinie p p′ mit x y, vertikal projicirt erscheinet. Die nun zu ziehende Gerade p′ o′ stellt den Halbmesser der Kugel dar, womit sofort die Projectionen der verlangten, umschriebenen Kugel des Tetraëders, beziehentlich aus o und o′, beschrieben werden können.

Sie sind nichts Anderes als die Projectionen von, zu den zwei Projectionsebenen parallelen, größten Kreisen der Kugel.

Dieselben müssen die Projectionen des Tetraëders umschließen. Auch wird man zur Bestätigung der Construction nicht versäumen, die Uebereinstimmung des gefundenen Halbmessers der Kugel mit den, nach andern Tetraëderecken gedachten Halbmessern, darzuthun. In der Figur geschah dies mit dem nach [a, a′] gehenden.

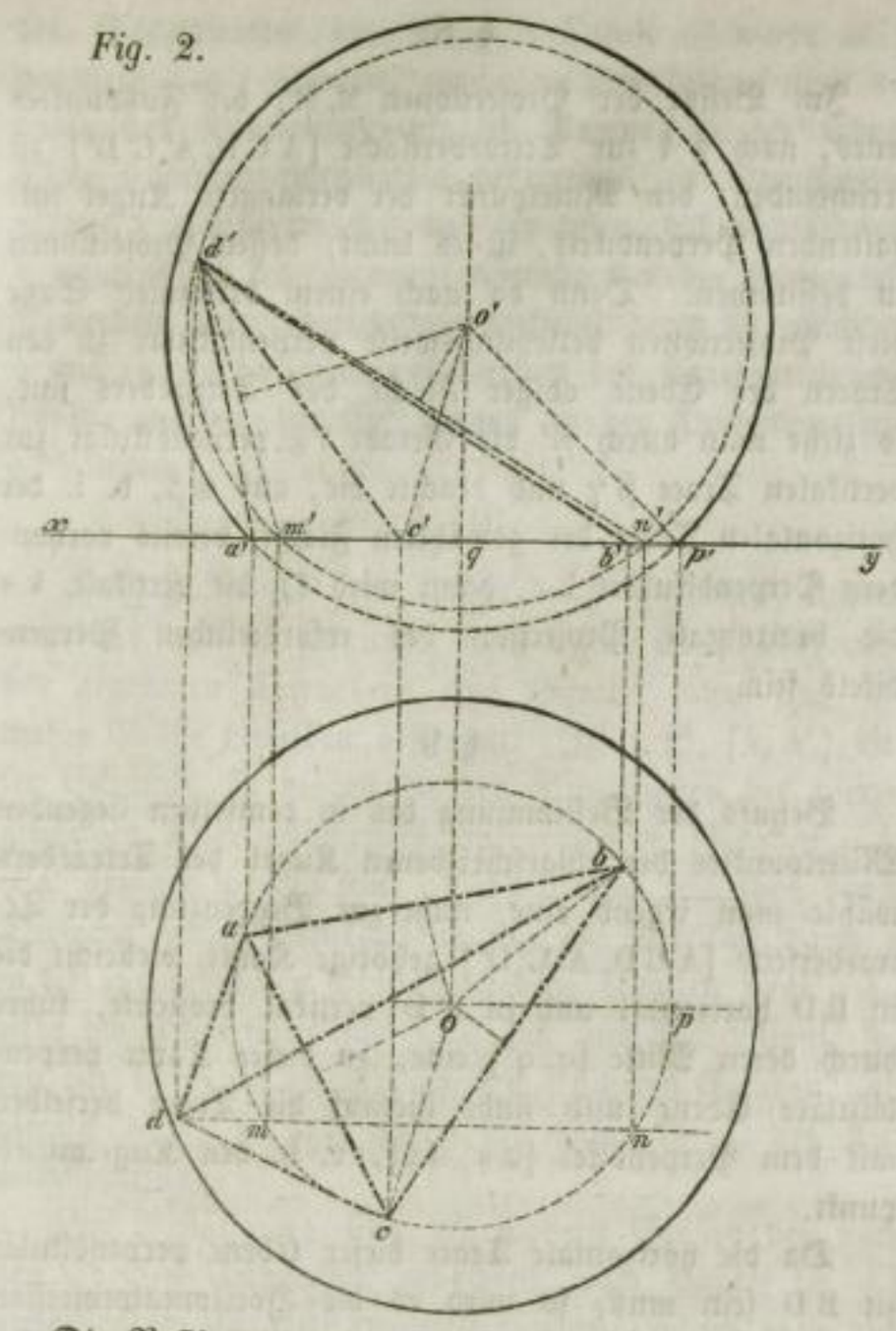
§ 3.

Wenn die vertikale Projectionsebene nicht parallel zur Kante [b d, b′ d′] (Fig. 2) gewählt werden kann, die horizontale Projectionsebene aber noch mit der Seite a b c des gegebenen Tetraëders zusammenfällt, dann führt folgende Construction zur Lösung des Problems.

Es werde der umschriebene Kreis jener Seite dargestellt. Offenbar liegt derselbe auf der Oberfläche der verlangten Kugel und projicirt sich vertikal auf der Projectionsaxe x y. Wie bei der vorigen Lösung, ist auch hier der Mittelpunkt o des Kreises die horizontale Projection des Mittelpunktes der Kugel, und dessen Vertikalprojection in der Projectionslinie o o′ gelegen.

Wird durch den Eckpunkt [d, d′] eine, zur vertikalen Projectionsebene parallele, die Parallele d n zu x y zur horizontalen Trace habende Ebene geführt, so schneidet dieselbe die Kugel in einem, sich vertikal in wahrer Größe projicirenden Kreise, dessen Mittelpunkt o′ die vertikale Projection des Mittelpunktes der Kugel sein muß. Da die Durchschnitte m, n der Vertikalebene durch [d, d′] mit dem umschriebenen Kreise des Dreieckes a b c, dem Kreise vom Mittelpunkte o′ angehören, so leuchtet ein, daß die, zu dessen Construction erforderlichen Stücke in den vertikalen Projectionen d′, m′, n′ derjenigen drei Punkte gegeben sind, deren horizontale Projectionen die vorher besprochenen Punkte d, m, n beziehentlich waren.

Fig. 2.



Die Bestimmung der wahren Größe des Halbmessers der Kugel geschieht gänzlich wie vorhin und ist zum Ueberfluß in der Figur nochmals angezeigt worden.

§ 4.

Allgemeine Lösung.

Das vorliegende Problem wird zu einem völlig allgemeinen, sobald man das Tetraëder in beliebiger Lage zu den Projectionsebenen voraussetzet.

A B C D, Taf. I, und A′ B′ C′ D′ stellen die beiden Projectionen eines Tetraëders dar, jene die horizontale, diese die vertikale. Man verlangt die umschriebene Kugel desselben, d. h. ihre Projectionen.

Unter den Seiten des gegebenen Tetraëders werde eine derselben gewählt, vielleicht die, in A D C horizontal und in A′ D′ C′ vertikal projicirte. Dieselbe ist auf eine der Projectionsebenen umzuklappen und alsdann mit einem umschriebenen Kreise zu versehen. Nun hat man dessen Mittelpunkt zu bestimmen, nach gedachter Zurückführung der Ebene dieser Seite, in ihre ursprüngliche Lage. Wird hierauf durch diesen Punkt ein Perpendikel zur nämlichen Seite gefällt, und solches vermittels einer, in der Mitte einer andern, im Scheitel [D, D′] convergirenden Kante, perpendikulären Ebene geschnitten, dann ist dieser Durchschnitt der Mittelpunkt, und eine von ihm aus nach irgend einem Eckpunkte des Tetraëders gezogene Gerade der Halbmesser der geforderten Kugel.

§ 5.

Die Ausführung unterliegt keinen erheblichen Schwierigkeiten. Insbesondere gelingt die Umklappung der oben genannten Tetraëderseite auf die horizontale Projectionsebene, durch die Angabe ihrer horizontalen Trace $\alpha\beta$. Sie ist die verbindende Gerade der horizontalen Tracen a und b, der diese Seite begrenzenden Kanten [A D, A′ D′], [C D, C′ D′]. Ueberdies sei bemerkt, daß die Gerade der vertikalen Tracen c, d, beziehentlich der Kanten [C D, C′ D′], [A C, A′ C′], nämlich $\beta\gamma$, die vertikale Trace der Ebene dieser Seite ist.

Durch den Eckpunkt [D, D′] werde eine, zur horizontalen Trace $\alpha\beta$ der Ebene $\alpha\beta\gamma$ perpendikuläre Ebene geführt, deren horizontale Trace das aus D auf $\alpha\beta$ gefällte Perpendikel D m D_0 ist; als Gerade aus dem Fußpunkte m in dieser Ebene, da umgekehrt $\alpha\beta$ perpendikulär zur ihr sein muß.

Weil ferner der, in m D horizontal projicirte Durchschnitt dieser Ebene mit derjenigen der Seite [A D C, A′ D′ C′] ebenfalls perpentikulär zu $\alpha\beta$ ist, so folgt, daß in der Erweiterung m D_0 von m D die Umklappung jenes Durchschnittes liegen wird, demnach auch diejenige des Punktes [D, D′]. Die im Raume den Punkt m mit dem Punkte [D, D′] verbindende Gerade kann als Hypothenuse eines, m D zur horizontalen Kathete habenden rechtwinkligen Dreieckes angesehen werden, dessen vertikale Kathete sich in dem Theile r D′ der Projectionslinie D D′ in wahrer Größe projicirt. Macht man daher auf x y, r m′ = m D und zieht m′ D′, so ist letztere die Hypothenuse, welche nur noch von m nach D_0 aufgetragen zu werden braucht, um in dem Punkte D_0 die Umklappung des Eckpunktes [D, D′] zu haben.

§ 6.

Ohne diese Construction würde D_0 auch auf andere Art zu bestimmen sein. Wird aus [D D′] eine Parallele zur horizontalen Trace $\alpha\beta$ der Ebene der Seite [A D C, A′ D′ C′] geführt, so liegt solche in dieser Ebene, und schneidet daher die vertikale Trace $\beta\gamma$ derselben in dem, E und E′ zu seinen Projectionen habenden Punkte, dessen Umklappung E″ auf die horizontale Projectionsebene ähnlich wie diejenige von [D, D′] zu finden ist. Anstatt der Construction eines rechtwinkligen Dreieckes genügt jedoch schon die Führung eines, β zum Mittelpunkt und β E′ zum Halbmesser habenden Kreises bis zum Durchschnitt E″, der horizontalen Trace E E_1 der zu $\alpha\beta$ perpendikulär gedachten Ebene. Denn es bleibt während der Umklappung der Ebene $\alpha\beta\gamma$ um ihre horizontale Trace $\alpha\beta$, der Punkt β unverändert, ebenso der Abstand desselben vom Punkte E′, der vertikalen Trace der durch den Eckpunkt [D, D′] des Tetraëders in dessen Seite [A C D, A′ C′ D′] vorausgesetzten Horizontale.

Führt man folglich β E″, so ist diese Gerade die Umklappung der vertikalen Trace $\beta\gamma$ der Ebene $\alpha\beta\gamma$,

und wird $E'' D_0$, parallel zu $\alpha\beta$, bis zum Durchschnitt D_0 der bekannten Geraden $D m$ gezogen, dann zeigt D_0 offenbar die Umklappung jenes Eckpunktes auf die horizontale Projectionsebene an.

Durch Vereinigung von D_0 mit den unverändert gebliebenen Punkten a und b, ergibt sich die Umklappung des, die Tetraëderfläche [A C D, A′ C′ D′] enthaltenden Dreieckes [a D b, a′ D′ b′], sowie diejenige dieser Fläche selbst, wenn man $A A_0$, $C C_0$, perpendikulär zu $\alpha\beta$, bis zur Begegnung mit $a D_0$, $b D_0$, endlich noch die Gerade $A_0 C_0$ zieht. Sie erscheint in dem Dreiecke $A_0 C_0 D_0$.

Die Punkte A_0 und C_0 sind zu bestätigen, wie solches für den Punkt D_0 geschah, d. h. es werden die Umklappungen der, durch die Eckpunkte [A, A′], [C, C′] parallel zu $\alpha\beta$ geführten Geraden zu finden sein, nach Art des im Risse dargestellten Verfahrens. Das Hindurchgehen derselben durch die bereits vorhandenen Umklappungen $A_0 C_0$ dient als Bestätigung dieser Punkte.

Nach Vollziehung sämmtlicher Schritte ist der Mittelpunkt M_0 des, das Dreieck $A_0 C_0 D_0$ umschreibenden Kreises anzugeben, worauf sich der Figur gemäß die Projectionen M und M′ bestimmen und prüfen lassen.

§ 7.

Hierzu reicht es hin, $M_0 M$ perpendikulär und $M_0 e'$ parallel zu $\alpha\beta$ zu ziehen und diese beiden Geraden in ihren Projectionen darzustellen. Anlangend die horizontale Projection der ersteren, so ist sie offenbar der vom Durchschnitt k der $M_0 M$ mit $\alpha\beta$ bis zu M reichende Theil des Perpendikels $M_0 M$.

Weil $k M_0$ und $m D_0$ Umklappungen zweier in der Ebene $\alpha\beta\gamma$ zu $\alpha\beta$ gelegener Perpendikel sind, so müssen ihre Projectionen bezüglich parallel sein. Nun aber ist die Gerade m′ D′ von dem Durchschnitte m′ der Projectionslinie m m′ und x y nach D′ die vertikale Projection von $m D_0$; daher diejenige von k M erhalten wird, indem man parallel zu m′ D′ durch k′, der vertikalen Projection des Punktes k eine Gerade k′ M′ zieht.

Nach dem Zurückführen der Ebene $\alpha\beta E''$ in ihre anfängliche Lage, gelangt der Durchschnitt e′ der Geraden $M_0 e'$ mit der Umklappung $\beta E''$ der vertikalen Trace $\beta\gamma$ der Ebene $\alpha\beta\gamma$, nach e, dem Durchschnitt des, aus β als Mittelpunkt, mit dem Halbmesser $\beta e'$ beschriebenen Bogens und $\beta\gamma$, projicirt sich in der zu x y parallelen e M′, die Vertikalprojection von M_0 bestimmend.

Der Fußpunkt e_0 des aus e zu x y gefällten Perpendikels ist die horizontale Projection der vertikalen Trace der Horizontalen $M_0 e'$, folglich die zu $\alpha\beta$ parallele Gerade $e_0 M$, deren Horizontalprojection und mithin ihr Durchschnitt M, mit derjenigen von $k M_0$ die horizontale Projection des, das Dreieck $A_0 C_0 D_0$ umschreibenden Kreises. Als Bestätigung wird die Gerade M M′ eine Projectionslinie, d. h. eine zur Projectionsaxe perpendikuläre Linie sein.

§ 8.

Im Besitze der Projectionen M, M′, des Fußpunktes jenes, nach § 4 zur Tetraëderfläche [A C D, A′ C′ D′] zu errichtenden, den Mittelpunkt der verlangten Kugel enthaltenden Perpendikels, ist es leicht, dessen Projectionen zu bestimmen. Denn da nach einem bekannten Satze diese Projectionen beziehungsweise perpendikulär zu den Tracen der Ebene obiger Fläche des Tetraëders sind, so ziehe man durch M′ die Gerade f g perpendikulär zur vertikalen Trace $\beta\gamma$ und beachte die, auf $\alpha\beta$, d. i. der horizontalen Trace der gewählten Fläche, bereits vorhandene Perpendikuläre k s, dann wird f g die vertikale, k s die horizontale Projection des erforderlichen Perpendikels sein.

§ 9.

Behufs der Bestimmung des in demselben liegenden Mittelpunktes der eingeschriebenen Kugel des Tetraëders wähle man irgend eine, nicht zur Begrenzung der Tetraëderseite [A C D, A′ C′ D′] gehörige Kante, vielleicht die in B D horizontal und in B′ D′ vertikal projicirte, führe durch deren Mitte [q, q′] eine, zu dieser Kante perpendikuläre Ebene und finde hierauf die Trace derselben mit dem Perpendikel [k s, f g], d. h. den Kugelmittelpunkt.

Da die horizontale Trace dieser Ebene perpendikulär zu B D sein muß, so wird es die Horizontalprojection der, durch [q, q′] gehenden, in der nämlichen Ebene liegenden Geraden [$q q_0$, $q' q_0'$] auch sein. Es ist daher das zu B D geführte Perpendikel $q q_0$ die horizontale Projection der im Raume durch den Halbirungspunkt [q q′] gedachten Parallele zur horizontalen Trace dieser Ebene, und die durch q′ geführte Parallele zu x y deren Vertikalprojection. Der Durchschnitt q′ dieser letzteren mit der aus q_0 errichteten Projectionslinie ist folglich der vertikalen Trace der zur Kante [B D, B′ D′] in deren Mitte [q, q′] perpendikulären Ebene angehörig. Indem man nun durch q_0' $\varphi\lambda$ perpendikulär zu B′ D′ und aus dem Durchschnitte λ von $\varphi\lambda$ mit x y, $\lambda\delta$ perpendikulär zu B D führt, so ergibt sich $\delta\lambda\varphi$, die gewünschte Ebene.

Ihre Trace [o, o′] mit dem bekannten Perpendikel [k s, f g] wird am einfachsten vermittelst einer Vertikalebene durch dasselbe gefunden, insofern deren Trace mit der Ebene $\delta\lambda\varphi$ den Punkt [o, o′], d. h. den Mittelpunkt der Kugel, nothwendig enthalten muß. t, der Punkt des Durchschnitts der horizontalen Trace dieser vertikalen Hülfsebene mit der Trace $\delta\lambda$ der Ebene $\delta\lambda\varphi$, ist aber schon ein Punkt der horizontalen Projection des Durchschnitts beider Ebenen und seine Vertikalprojection t′ der Fußpunkt der Projectionslinie t t′ in x y.

Ein zweiter Punkt dieses Durchschnitts projicirt sich horizontal in s, vertikal im Durchschnitte der Projectionslinie s s′ mit $q' q_0'$. Zieht man daher die Gerade s′ t′, so schneidet solche f g in o′, der vertikalen Projection

des Mittelpunktes der Kugel. Durch o′ werde o′ v′ parallel zu x y gezogen, welche die Vertikalprojection der durch den Kugelmittelpunkt im Raume, in der Ebene δ λ φ gedachten Horizontale bedeutet. Ihr Durchschnitt v′ mit λ φ projicirt sich auf x y in v, daher die durch v parallel zu δ λ gezogene Gerade v o die horizontale Projection dieser Horizontale darstellt, deren Durchschnitt o mit t s die horizontale Projection des Kugelmittelpunktes ist; welcher zur Bestätigung in der Projectionslinie o o′ liegt.

§ 10.

Der Halbmesser der Kugel wird gefunden, indem man aus dem Mittelpunkte nach irgend einem Eckpunkte des gegebenen Tetraëders eine Gerade führt und die wahre Größe derselben bestimmt. Ist z. B. [A, A′] dieser Eckpunkt, so mögen die den Projectionen des hierzu gehörigen Kugelhalbmessers entsprechenden Geraden o A, o′ A′ gezogen worden sein. Versetzt man denselben durch Drehung seiner Vertikalebene um die Vertikale durch o in die zur vertikalen Projectionsebene parallele Lage o A_1, zieht die Projectionslinie $A_1 A_1'$ bis zum Durchschnitt A_1' mit der durch A′ parallel zu x y geführten Geraden und hierauf A_1' o′, so stellt letztere die wahre Größe des Kugelhalbmessers.

Zur Bestätigung sind die wahren Größen der nach den übrigen Eckpunkten gedachten, vom Punkte [o, o′] ausgehenden Geraden ermittelt worden; indem man dieselben, nach Art des Risses in eine zur vertikalen Projectionsebene parallele Lage versetzte. Dieselben zeigten völlige Uebereinstimmung dergestalt, daß die Projectionen der geforderten, umschriebenen Kugel sofort ausgeführt werden konnten.

§ 11.

Aufgabe II.

Darstellung der eingeschriebenen Kugel eines Tetraëders.

Auflösung.

Berührt eine Kugel alle Seiten eines Polyeders, dann wird sie eine eingeschriebene genannt. Von selbst folgt hieraus, daß ihr Mittelpunkt von den Seiten des Polyeders einerlei Abstand hat.

Da nun nach einem bekannten Satze, jeder Punkt der, einen Flächenwinkel halbirenden Ebene von den Seiten desselben gleich weit entfernt ist, so sieht man leicht ein, daß der Mittelpunkt der eingeschriebenen Kugel eines Tetraëders auf allen die Kantenwinkel desselben halbirenden Ebenen zugleich gelegen sein wird.

Werden die Halbirungsebenen der sechs Kantenwinkel sich in einem einzigen Punkte schneiden? Und wenn solches der Fall ist, wird man dann unausgewählt drei beliebige dieser Halbirungsebenen nehmen dürfen?

Vermöge des oben berührten Lehrsatzes folgt, daß zwei, die Kantwinkel eines dreiseitigen Körperwinkels halbirenden Ebenen sich in einer Geraden schneiden, deren Punkte von den Seiten dieses Körperwinkels einerlei Abstand haben und daß, nach demselben Satze, diese Gerade auch auf der dritten Halbirungsebene liegen muß. Wird nun die Gerade von der Halbirungsebene eines neuen Kantenwinkels des Tetraëders geschnitten, dann ist aus demselben Grunde dieser Punkt von der vierten Seite in der nämlichen Entfernung als in Bezug auf die drei ersten gelegen. Demnach gehört er auch zu den Halbirungsebenen der übrigen zwei Kantenwinkel und mithin schneiden sich die Halbirungsebenen der sechs Kantenwinkel des Tetraëders in einem einzigen Punkte, d. i. im Mittelpunkte der eingeschriebenen Kugel.

Zugleich folgt hieraus, daß zur Darstellung dieses Punktes nicht die Halbirungsebenen der Kantenwinkel des nämlichen Körperwinkels des Tetraëders zu wählen sind, da solche einander in einer Geraden und keineswegs in einem Punkte schneiden.

§ 12.

Hierdurch sind sämmtliche zur Lösung des vorliegenden Problems erforderlichen Schritte genügend vorgezeichnet. Indem wir uns zur Vollziehung derselben wenden, sei bemerkt, daß vor einer allgemeinen Behandlung des Gegenstandes der günstige Fall seine Erledigung finden wird, für welchen eine der Tetraëderseiten in der horizontalen Projtctionsebene gelegen ist.

Es sei dies die Seite A B C der Fig. 3. Der vierte Eckpunkt D, welchen wir den Scheitel nennen wollen, projicirt sich horizontal und vertikal bezüglich in d und d′, während A′, B′, C′ die vertikalen Projectionen der drei ersten Eckpunkte des Tetraëders bedeuten.

Der Forderung wird leicht zu entsprechen sein, sobald man die Neigungswinkel derjenigen Seiten des Tetraëders halbirt, deren Kanten in der horizontalen Projectionsebene liegen. Wie leicht zu ersehen, bilden diese drei Halbirungsebenen einen neuen dreiseitigen Körperwinkel, dessen Scheitel der Mittelpunkt der eingeschriebenen Kugel ist, und dessen Kanten durch die Eckpunkte A, B, C des Tetraëders hindurch gehen müssen. Alles kommt daher nur auf die Darstellung dieser drei Kanten an.

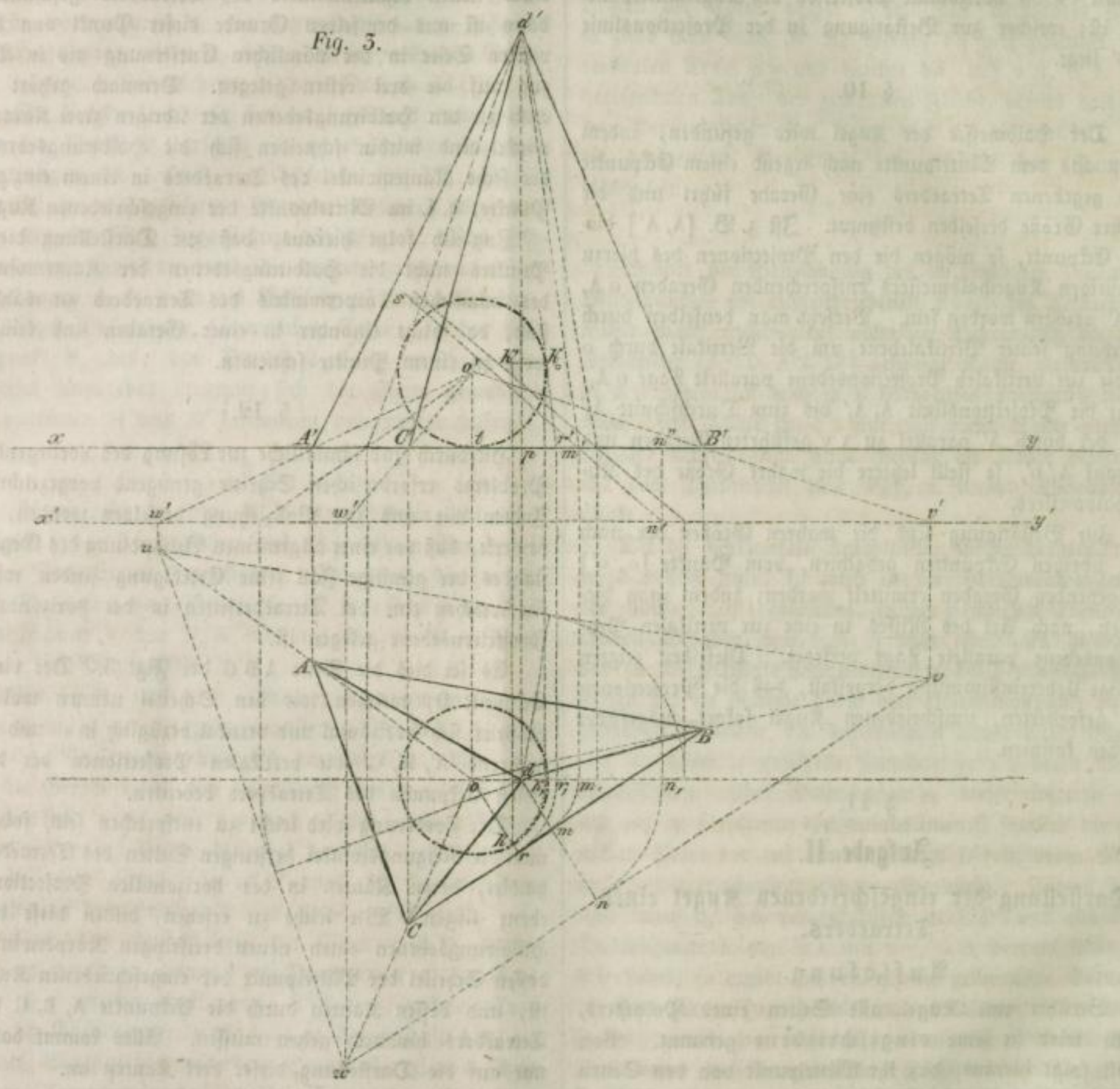
§ 13.

Denkt man sich zu dem Ende aus dem Scheitel D perpendikuläre Ebenen zu den Kanten A B, B C, A C, so werden die Durchschnitte derselben mit den Seiten jener Kanten die, diesen zukommenden Neigungswinkel beziehentlich bilden.

Sei d n die horizontale Trace der, zu B C perpendikulären durch den Scheitel D gehenden Ebene. Wird dieselbe um die Vertikale durch d drehend bis zum Parallelsein zur vertikalen Projectionsebene bewegt, dann

gelangt m, d. i. der Durchschnitt der Schenkel des Kantenwinkels für B C nach m_1 in die zu x y parallele Gerade $d m_1$ und projicirt sich vertikal auf m′. Zieht man nun die Gerade m′ d′, so stellt der Winkel x m′ d′ die wahre Größe dieses Kantenwinkels dar. Derselbe ist zu halbiren, was durch die Gerade s m′ geschieht. Auch werde auf die nämliche Art die wahre Größe eines jeden der

Fig. 3.



zwei übrigen Kantenwinkel gefunden, und die betreffende Halbirungslinie gezogen.

x′ y′, eine Parallele zu x y, sei die vertikale Trace einer horizontalen, in beliebiger Entfernung, und an einer der Seiten hinsichtlich der horizontalen Projectionsebene, geführten Hülfsebene. Dieselbe schneidet die Seiten des neuen Körperwinkels in, zu den horizontalen Kanten des Tetraëders bezüglich parallelen Geraden.

Zur Darstellung des Schnittes dieser Ebene mit der halbirenden Ebene des Kantenwinkels B C dient die Trace n′ der Halbirungslinie s n der wahren Größe x m′ d′ dieses Winkels mit der Hülfsebene x′ y′. Dieselbe projicirt sich horizontal in n, auf der, zu x y durch d gehenden Parallele, in einem Abstande $d n_1 = p n''$ von d, und kommt durch Zurückführung der Ebene dieses Winkels in ihre ursprüngliche Lage nach n, dergestalt, daß $d n = d n_1$ ist. Nun ist es klar, daß die, durch n zu B C gezogene Parallele v w, den Durchschnitt der Hülfsebene mit der Halbirungsebene des Winkels der Seiten an der Kante B C in horizontaler Projection darstellt und dieser Durchschnitt vertikal auf x′ y′ projicirt erscheint.

Auf dieselbe Weise ergeben sich die horizontalen Projectionen w u, u v der Durchschnitte der Hülfsebene x′ y′ mit den Halbirungsebenen der andern beiden Kantenwinkel. Die je zweien dieser Durchschnitte gemeinschaftlichen Punkte u, v, w sind offenbar horizontale Projectionen von Punkten der drei Kanten des Körperwinkels,

welchen die drei Halbirungsebenen der Flächenwinkel der Kanten A B, B C, A C des Tetraëders bestimmen. Da dieselben aber auch durch die Eckpunkte A, B, C beziehentlich hindurch gehen müssen, so leuchtet ein, daß die horizontalen Projectionen der drei Kanten jenes Körperwinkels als bekannt anzusehen sind und nur gezogen werden dürfen. Die drei, sich in o schneidenden Geraden u A, v B, w C stellen dieselben dar.

§ 14.

Werden aus u, v, w die Projectionslinien u u′, v v′, w w′ gezogen, dann sind deren Fußpunkte in x′ y′ die vertikalen Projectionen jener Punkte, welche nur noch der Vereinigung mit den vertikalen Projectionen der drei, in der horizontalen Projectionsebene gelegenen Eckpunkte des Tetraëders bedürfen, um auch sogleich die vertikalen Projectionen der Kanten des Körperwinkels zu besitzen. Die sich in o′, der vertikalen Projection des Mittelpunktes der verlangten Kugel, schneidenden Geraden u′ A′, v′ B′, w′ C′ sind dieselben.

Als Bestätigung dient der Umstand, daß die Projectionslinie durch o′ zugleich durch die Horizontalprojection o des Scheitels dieses Körperwinkels, d. i. des Kugelmittelpunktes, hindurch geht.

Das aus [o, o′] auf A B C gefällte, in o′ t vertikal projicirte Perpendikel zeigt die wahre Größe des Halbmessers der eingeschriebenen Kugel des Tetraëders, welche nun in ihren Projectionen construirt werden kann. Wie bei der vorigen Aufgabe, sind dieselben auch hier nichts Anderes als Projectionen von, zu den Projectionsebenen parallelen größten Kreisen der Kugel.

§ 15.

Verlangt man noch die Berührungspunkte, so ist zuerst bekannt, daß o und t die Projectionen des Berührungspunktes der Kugel mit der horizontalen Seite des Tetraëders sind. Für die andern, z. B. die Seite [B C D, B′ C′ D′], ergiebt sich der Berührungspunkt [k, k′] auf folgende Art.

Aus dem Mittelpunkte [o, o′] der Kugel werde ein Perpendikel zur Ebene dieser Seite gedacht, welches sich horizontal in der, zu B C perpendikulären Geraden o r projiciren wird. Eine Vertikalebene durch dasselbe hat ihre horizontale Trace in o r und schneidet die Kugel in einem größten Kreise, die Ebene der Seite in der, horizontal ebenfalls in o r projicirten Tangente des verlangten Berührungspunktes. Durch Drehung der, o r zur horizontalen Trace habenden Vertikalebene um die, in o horizontal projicirte Vertikale bis zum Parallelsein zur vertikalen Projectionsebene, werden jener Kreis in wahrer Größe und dessen Tangente in wirklicher Lage vertikal projicirt. Denn es gelangt hierdurch die horizontale Trace der Tangente nach r_1 in die, zu x y durch o führende Parallele o r_1 und sie hat alsdann r′, den Durchschnitt der Projectionslinie r_1 r′ mit x y, zur vertikalen Projection. Indem man endlich die Tangente r_1 k_0 zum größten Kreise der Kugel zieht, so ergiebt sich der Berührungspunkt k_0, welcher nach dem Zurückführen dieser Ebene in ihre frühere Lage in der nämlichen Höhe über der horizontalen Projectionsebene gelegen ist, daher seine vertikale Projection in der, durch k_0 zu x y gehenden Parallele haben muß. k_1, die horizontale Projection von k_0, ist hierbei vermittelst eines Kreisbogens vom Mittelpunkt o und Halbmesser o k_1 nach k, der horizontalen Projection des Berührungspunktes, gekommen, dessen andere Projection im Durchschnitt k′ der Projectionslinie k k′ mit k_0 k′ liegt.

Auf dieselbe Weise sind die Berührungspunkte für die noch übrigen Seiten des Tetraëders zu bestimmen. Wie in der sogleich vorzunehmenden, allgemeinen Lösung dieser Aufgabe, könnten auch hier die Tracen der Seiten des Tetraëders zur Ermittelung ihrer Berührungspunkte benutzt werden.

§ 16.

Allgemeine Lösung.

Es wird der Allgemeinheit der Betrachtung Nichts entzogen, sobald man eine der Projectionsebenen durch einen der Eckpunkte gehend voraussetzt, z. B., wie auf der Taf. II, den Punkt [A, A′] des Tetraëders [A B C D, A′ B′ C′ D′] mit der horizontalen Projectionsebene zusammenfallend erachtet.

Der Lösung des besondern Falles ähnlich, kommt es auch hier darauf an, einen dreiseitigen Körperwinkel darzustellen, dessen Seiten bezüglich die Halbirungsebenen dreier, nicht zum nämlichen Eckpunkte des gegebenen Tetraëders gehöriger Kantenwinkel sind. Ebenso werden, wie vorhin, die Tracen der, aus dem Scheitel des helfenden Körperwinkels zu den Seiten des Tetraëders geführten Perpendikel die Berührungspunkte der eingeschriebenen Kugel sein, deren Projectionen vermittelst des, in wahrer Größe darzustellenden, übereinstimmenden Abstandes jenes Scheitels von den Tetraëderseiten, auszuführen sind.

§ 17.

Der fragliche Körperwinkel ist, wie im besonderen Falle, durch seine Kanten zu bestimmen. Angenommen, dessen Seiten halbirten die Winkel der Kanten [A B, A′ B′], [A C, A′ C′], [B C, B′ C′], dann wird man aus dem vierten Eckpunkte [D, D′] perpendikuläre Ebenen bezüglich zu diesen Kanten darstellen, deren Tracen mit den, die nämlichen Kanten bildenden Seiten suchen, und im Neigungswinkel je zweier zusammengehöriger Tracen die Größe der Neigung des betreffenden Kantenwinkels haben. Werden hierauf die Halbirenden der Winkel dieser Tracen gezogen, von einer zur Tetraëderseite [A B C, A′ B′ C′] parallelen Ebene durchschnitten, und aus den Durchschnitten Parallelen bezüglich zu den Kanten dieser

Seiten geführt, dann schneiden diese Parallelen einander in, den Kanten des zu Hülfe gezogenen Körperwinkels angehörigen Punkten. Weil aber diese Kanten auch durch die Eckpunkte [A, A′], [B, B′], [C, C′] gehen müssen, so sind sie nun bestimmt; daher auch die Projectionen ihres Scheitels, d. h. des Mittelpunktes der verlangten Kugel. Von da aus sind es nur wenige Schritte bis zur gänzlichen Vollendung der Lösung des vorliegenden Problems.

Kommen wir nach dieser Uebersicht zum Einzelnen und beginnen mit der, durch [D, D′] zur Kante [A C, A′ C′] perpendikulären Ebene.

§ 18.

Zur perpendikulären Lage einer Ebene hinsichtlich einer Geraden gehört, daß die Tracen jener zu den Projectionen dieser beziehentlich perpendikulär sind; d. h. es muß die horizontale Trace der Ebene perpendikulär zur horizontalen Projection der Geraden, und die vertikale Trace jener perpendikulär zur vertikalen Projection dieser sein.

Die Mühe des Aufsuchens der Begründung dieser Behauptung in einem Lehrbuche sei durch Nachfolgendes entbehrlich gemacht.

Da die fragliche Ebene durch den Eckpunkt [D, D′] perpendikulär zur Kante [A C, A′ C′] sein soll, so wird die Kante perpendikulär zur Ebene sein. Jede durch diese Gerade geführte Ebene ist aber perpendikulär zu jener Ebene, folglich auch die, diese Kante horizontal projicirende Ebene. Letztere Ebene ist also zugleich perpendikulär zur verlangten Ebene und zur horizontalen Projectionsebene, daher sind umgekehrt diese zwei Ebenen perpendikulär zur ersteren, und mithin ist es ihr Durchschnitt auch. Dieser, die horizontale Trace der gesuchten Ebene, muß perpendikulär zu allen, durch seinen Fußpunkt in der projicirenden Ebene gehenden Geraden sein, folglich ist er es auch zur horizontalen Trace dieser Ebene, mit welcher die Horizontalprojection der gegebenen Kante zusammenfällt.

Ebenso zeigt man, daß die vertikale Trace der darzustellenden Ebene perpendikulär zu A′ C′, der vertikalen Projection der gewählten Kante des Tetraëders, sei.

§ 19.

Wird daher durch D D a perpendikulär zu A C geführt, aus a, dem Durchschnitt dieser Geraden mit der Projectionstaxe x y, das Perpendikel a a′ hierzu gefällt und solches durch die Parallele D′ a′ zu x y in a′ begrenzt, dann gehört der Punkt a′ der vertikalen Trace der verlangten Ebene an; denn er ist die vertikale Trace der, durch den Punkt [D, D′] gehenden, und nach § 18 zu deren horizontaler Trace parallelen Geraden [D a, D′ a′]. Das, aus a′ auf A′ C′ zu ziehende Perpendikel a′ λ stellt nach demselben Paragraph die vertikale Trace der, aus [D, D′] perpendikulär zu [A C, A′ C′] zu führenden Ebene dar, sowie die aus dem Durchschnitt λ von a′ λ mit x y, perpendikulär zu A′ C′ zu construirende Gerade λ φ die horizontale Trace der, hiermit bestimmten Ebene φ λ a bedeutet.

Vor Allem werde nun der Fußpunkt [d, d′] der Kante [A C, A′ C′] in der Ebene φ λ a′ ermittelt, da von ihm aus die Tracen dieser Ebene mit jenen der Seiten jener Kante beginnen, welche unter sich den darzustellenden Kantenwinkel einschließen.

Am leichtesten gelingt dies unter Gebrauch der Tracen sämmtlicher zum gegenseitigen Durchschnitt gelangender Ebenen. A ist vermöge der Voraussetzung ein Punkt der horizontalen Trace der Seite [A C D, A′ C′ D′] des Tetraëders. Ein zweiter p ergiebt sich, indem man D′ C′ bis zum Durchschnitt p′ mit x y fortbringt und hierzu das Perpendikel p′ p bis zum Durchschnitt mit der Erweiterung von C D fällt. Hiernach ist p der horizontalen Trace der Kante [C D, C′ D′] und folglich die horizontale Trace der Ebene der in Rede stehenden Seite des Tetraëders zukommend. Zieht man nun die Gerade A p bis zum Durchschnitt θ mit x y, so ist A θ die horizontale Trace dieser Ebene.

Die vertikale Trace folgt aus derjenigen der Kante [D C, D′ C′], zu welcher man durch die Verlängerung von D′ C′ gelangt und dadurch, daß aus dem Durchschnitte τ von D C mit x y die Projectionslinie τ τ′ gezogen wird. Die Gerade τ′ θ ist die vertikale Trace der Ebene der Seite [A C D, A′ C′ D′], die einer Bestätigung unterliegt. Sie muß durch die vertikale Trace η der, durch [D, D′] zu A θ parallelen Geraden [D η, D′ η] führen, dergestalt, daß nun A θ η die Ebene dieser Seite ist.

§ 20.

Die horizontalen Tracen A θ, λ φ bezüglich der Ebenen A θ η, φ λ a′ schneiden einander im Punkte n der horizontalen Projectionsebene, welcher ein Punkt der horizontalen Projection n D des Durchschnittes beider Ebenen ist, die übrigens durch D gehen muß. Wird daher n D gezogen, dann schneidet diese Gerade A C in d, der horizontalen Projection des Scheitels des zu [A C, A′ C′] gehörigen Kantenwinkels. d D zeigt diejenige des, auf der Seite [A C D, A′ C′ D′] liegenden Schenkels desselben. Dessen Vertikalprojection folgt sehr leicht mittelst der Projectionslinie n n′ und des Ziehens der Geraden n′ D′. Zugleich ergiebt sich hierbei die vertikale Projection d′ des Scheitels dieses Winkels im Durchschnitt von n′ D′ und A′ C′, welche zur Bestätigung mit d im nämlichen Perpendikel zu x y gelegen sein muß.

Der andere Schenkel [d h, d′ h′] wird auf dieselbe Art bestimmt. Man suche — wie solches der Riß deutlich zeigt — den Durchschnitt [g, g′] der horizontalen Trace p g, der Ebene der Seite [D B C, D′ B′ C′] mit φ λ, ziehe die, B C in h schneidende Gerade g D, hierauf d h, so ist d h die horizontale Projection des andern Schenkels; denn er liegt hiernach in dem Durchschnitte

der, aus [D, D′] perpendikulär zu [A C, A′ C′] geführten Ebene mit der Seite [A B C, A′ B′ C′] des gegebenen Tetraeders.

Die Projectionslinie g g′ führt zum Punkte g′ in x y, der vertikalen Projection der horizontalen Trace des Durchschnitts der Ebene φ λ a′ mit der Ebene der Tetraederseite [B C D, B′ C′ D′], das Ziehen der Geraden g′ D′ zum Punkte h′, der Vertikalprojection des Durchschnitts des andern Schenkels unsers darzustellenden Winkels mit der Kante [B C, B′ C′], sowie endlich das Ziehen der Geraden d′ h′ die vertikale Projection dieses Schenkels selbst herbeiführt, dergestalt, daß der zu [A C, A′ C′] gehörige Kantenwinkel in D d h horizontal und in D′ d′ h′ vertikal projicirt erscheint.

§ 21.

Zur Darstellung der wahren Größe dieses Winkels bedienen wir uns der Umklappung seiner Ebene φ λ a′ auf eine horizontale, z. B. durch den Eckpunkt [D, D′] gedachte Ebene, und sehen den Durchschnitt beider Ebenen als feste Drehungsaxe der Umklappung an.

Da zwei paralle Ebenen von einer dritten in parallelen Geraden geschnitten werden, so folgt, daß die horizontale Projection D t_1 der Drehaxe parallel zu φ λ, die vertikale D′ t parallel zu x y ist. Die Erweiterung von d h trifft D t_1 im Punkte t, welcher wie der Punkt [D, D′] unverändert bleibt, sobald die Umklappung im vorhin bemerkten Sinne vollzogen wird. Als Bestätigung wird zu zeigen sein, daß die vertikale Projection t der Trace des Schenkels [d h, d′ h′] in Bezug auf die Umklappungsebene mit t_1 in der nämlichen Projectionslinie enthalten ist.

Da nun die Axe der Umklappung durch die, während deren Vollziehung unverändert bleibenden Punkte D und t_1 den Durchschnitten der Schenkel des, horizontal in D d t_1 projicirten Kantenwinkels geht, so wird es jetzt nur zur wahren Größenbestimmung dieses Winkels auf die Umklappung seines Scheitels [d, d′] ankommen. Demzufolge führe man durch denselben eine, zu φ λ perpendikuläre Ebene, deren horizontale Trace auf A C fallen muß, darin sich zugleich der Durchschnitt dieser Ebene mit der Ebene obiger zwei Schenkel horizontal projicirt, bemerke, daß diese Vertikalebene D t_1 in c schneidet und daher die, im Raume aus c nach d führende — wie leicht begreiflich, weil zu φ λ also auch zu D t_1 perpendikuläre — Gerade umzuklappen ist.

Da diese Gerade während der Drehung fortwährend perpendikulär zur Axe D t_1 bleibt, so wird sie es im Augenblick der Umklappung noch sein, daher die Umklappung jener, den Abstand des Scheitels [d, d′] von D t_1 ausdrückenden Gerade in die Ausbreitung von A C fällt. Wäre dann die wahre Größe dieses Abstandes bekannt, so würde solche zur Umklappung jenes Scheitels angewendet werden. Man hätte nur nöthig, dieselbe vom unverändert bleibenden Punkt c auf die Verlängerung von A C aufzutragen.

Nimmt man hierzu an, es werde die Vertikalebene um die, in ihr enthaltene, horizontal im Punkte c projicirte Vertikale drehend bewegt, bis zum Parallelsein mit der vertikalen Projectionsebene, dann projicirt sich d c vertikal in wahrer Größe auf d_0' c′. Denn es gelangt d mittelst des Kreisbogens um c auf die zu x y parallele Gerade c d_0 — der horizontalen Trace jener Vertikalebene in ihrer neuen Lage — nach d_0 und projicirt sich alsdann vertikal, im Durchschnitt d_0' der Projectionslinie d_0 d_0' mit der, durch d′ zu x y parallelen vertikalen Trace d_0' c″ der, durch den Scheitel d gedachten Horizontalebene. Es bedarf daher nur noch des Ziehens der Geraden von diesem Punkte d_0' nach der Vertikalprojection c′ des Punktes c, um in dieser, d. i. in d_0' c′, das zur Umklappung des fraglichen Scheitels [d, d′] Erforderliche zu haben.

Macht man daher auf A C, c Δ = d_0' c′, so ist Δ die Umklappung dieses Scheitels, und werden hierzu noch die Geraden Δ D, Δ t_1 gefügt, dann zeigt ∠ D Δ t_1 die wahre Größe der Neigung der, zur Kante [A C, A′ C′] gehörenden Seiten des gegebenen Tetraeders an.

§ 22.

Δ u_1 zeigt die Halbirende dieses Winkels, welche die Axe D t, der Umklappung in u_0 d. i. in einem Punkte schneidet, der beim Zurückführen der Ebene des Winkels D Δ t_1 in seine ursprüngliche Lage unverändert bleibt. Zieht man daher die Gerade u_0 d, so stellt solche die horizontale Projection der Halbirungslinie unseres Kantenwinkels dar, und es ergiebt sich deren vertikale Projection sogleich durch die Gerade d′ u_0' aus d′ zur Vertikalprojection u_0' jenes unveränderlichen Punktes u_0.

Diese, nun bestimmte Halbirende [d u_0, d′ u_0'], liegt auf der, durch die Kante [A C, A′ C′] gehenden Seite des zu Hülfe zu ziehenden, dreiseitigen Körperwinkels vom Scheitel [o, o′]. Zu dessen Darstellung fahren wir fort, und finden, in den beiden anderen Seiten desselben, vorkommende Gerade; zunächst in der, durch die Kante [A B, A′ B′] gehenden.

Wiederum sind es die Schenkel des, die Neigung der Seiten dieser Kante messenden Winkels, um deren graphische Darstellung sich's vor Allem handeln wird. Wir wissen nach dem Vorangegangenen, daß diese Schenkel nichts Anderes sind als die Durchschnitte der, durch den Eckpunkt [D, D′] des Tetraeders zur Kante [A B, A′ B′] perpendikulär geführten Ebene mit den Seiten dieser Kante.

Zur Darstellung aber der Tracen dieser Ebene reicht es hin, einen Punkt der vertikalen Trace zu bestimmen. Dieser Punkt E′ ergiebt sich sofort, indem man durch den Eckpunkt [D, D′] eine Parallele zur künftigen horizontalen Trace der fraglichen Ebene führt, welche hori-

zontal als das Perpendikel D E zu A B, vertikal in der, durch D′ gehenden Parallele D′ E′ zu x y projicirt erscheint. Offenbar führt die Projectionslinie E E′ in ihrer Begrenzung E′ zur vertikalen Trace dieser Horizontale, dergestalt, daß nun das zu A′ B′ gefällte Perpendikel E′ N die vertikale, und die aus dessen Durchschnitt N perpendikulär zu A B gezogene Gerade N Z_1 die horizontale Trace der geforderten Ebene darstellen; so wie Z_1 N E′ die Bezeichnungsweise derselben ist.

Ihr Durchschnitt mit der Seite [A B D, A′ B′ D′] giebt den einen, sowie derjenige mit der Seite [A B C, A′ B′ C′] den anderen Schenkel des Neigungswinkels beider Seiten zu einander an. Mittelst der Durchschnitte der Tracen dieser Seiten in den Projectionsebenen mit denen der Ebene Z_1 N E′ können die zwei Schenkel leicht gefunden werden.

§ 23.

Die horizontale Trace der Kante [B D, B′ D′] ist, nach Anleitung des Risses, der Punkt R, die vertikale S′, daher die, x y in r_0 schneidende Gerade A R die horizontale Trace der Ebene der Seite [A B D, A′ B′ D′]. S′ zeigt die vertikale Trace der nämlichen Kante, einen zweiten Punkt der vertikalen Trace dieser Seitenebene, wofür ein dritter ζ′ gefunden wird, indem man durch [D, D′] eine, in dieser Seite liegende Horizontale voraussetzt, welche sich horizontal als Parallele D ζ zu A r_0, vertikal auf der, durch D zu x y geführten Parallele D′ ζ′ projicirt. Die vertikale Trace ζ′ dieser Horizontalen folgt durch Ziehung der Projectionslinie ζ ζ′, und es werden zur Bestätigung die Punkte S′, r_0, ζ′ in der nämlichen Geraden, d. i. der vertikalen Trace der Ebene A r_0 ζ′ jener Seite, enthalten sein.

Zieht man nun aus dem Durchschnitt r der horizontalen Tracen A r_0, Z_1 N die Gerade r D, so ist sie die Horizontalprojection des ersten obiger Schenkel, und wenn aus dem Durchschnitt F, der vertikalen Tracen r_0 ζ′, N E′ dieser Ebenen die Gerade F D′ geführt wird, dann ist dieselbe die vertikale Projection desselben Schenkels. Als Bestätigung müssen die Durchschnitte l, l′ dieser Projectionen beziehentlich mit A B und A′ B′ in der nämlichen Projectionslinie l l′ liegen.

§ 24.

Um die Projectionen des andern Schenkels des fraglichen Neigungswinkels zu erhalten, reicht es hin, den Durchschnitt der, aus [D D′] auf [A B, A′ B′] perpendikulär geführten Ebene Z_1 N E′ mit der Ebene der Tetraëderseite [A B C, A′ B′ C′] zu bestimmen.

Da die, diese Seite begrenzenden Kanten [A B, A′ B′], [A C, A′ C′] den Stützpunkt A des Tetraëders zu ihrer gemeinschaftlichen horizontalen Trace haben, so wird es nur noch auf die Ermittelung der vertikalen Tracen derselben ankommen. Führt man zu dem Ende A B fort bis zum Durchschnitt l_0 mit x y, und hierauf die, die Erweiterung von A′ B′ in l_0' schneidenden Projectionslinie l_0 l_0', dann ist l_0' ein Punkt der vertikalen Trace dieser Seitenebene.

Ein zweiter Punkt c_0' derselben, die vertikale Trace der Kante [A C, A′ C′] wird auf dieselbe Art erhalten und bietet im Verein mit der vorhin gefundenen l_0' das zur vertikalen Trace der Ebene dieser Seite Erforderliche dar. Die Gerade, x y in β schneidende l_0' c_0' stellt sie dar, folglich β A die horizontale Trace derselben Ebene, deren Ausdruck A β l_0' ist.

Sofort erkennt man den Durchschnitt M′ der vertikalen Tracen der Ebenen A β l_0' und Z_1 N E′, und ist versichert, daß durch das Ziehen der Geraden M′ l′ die vertikale Projection des zweiten Schenkels obigen Neigungswinkels entfällt. Es kann für die Darstellung der horizontalen Projection dieses zweiten Schenkels kein Hinderniß aus dem Fallen des Durchschnittes der horizontalen Tracen beider Ebenen jenseits der Blattgrenze entstehen; vielmehr genügt schon die Projectionslinie M′ M und hierauf das Ziehen der Geraden M l, um in ihr die gewünschte Horizontalprojection zu besitzen.

Die Kante [B C, B′ C′] schneidet von diesem zweiten Schenkel [l M, l′ M′] das Stück [l m, l′ m′] ab, für welches die Projectionen des Endpunktes [m, m′] in derselben Projectionslinie enthalten sein müssen. Zum Ueberfluß sind die Punkte m, m′ die Projectionen beziehentlich des Durchschnittes der Kante [B C, B′ C′] mit der Durchschnittslinie [P D, P′ D′] der Ebene Z_1 N E′ und der Ebene der Seite [B C D, B′ C′ D′].

§ 25.

Die wahre Größe des Winkels [D l M, D′ l′ M′] anlangend, so wird solche ebenfalls durch den Proceß einer Umklappung seiner Ebene gefunden. Vortheilhaft erscheint es jedoch, die Umklappung der Ebene dieses Winkels um ihre vertikale Trace M′ F zu bewerkstelligen, oder, was auf Eins hinauskommt, um die vertikale Trace der Ebene Z N E′.

Berücksichtigt man, daß diese Ebene zur Kante [A B, A′ B′] perpendikulär geführt wurde, dann folgt sogleich, daß die, im Raume aus dem Scheitel [l, l′] zur Umklappungsaxe F E′ perpendikulär gedachte Gerade auf A′ B′ ihre vertikale Projection haben wird. Dieselbe ist S l′ und S_1 l die horizontale; zu welcher letztern die aus dem Fußpunkte S jenes Perpendikels gezogene Projectionslinie S S_1 führt, indem man deren Begrenzung S_1 durch x y, mit der horizontalen Projection l des Scheitels verbindet.

Man hat, Behufs der zu vollziehenden Umklappung der Ebene des Kantenwinkels [D l M, D′ l′ M′], die wahre Größe des Perpendikels [l S, l′ S′] darzustellen und solche vom Punkte S aus auf die Erweiterung von A′ B′ aufzutragen. Nun aber leuchtet ein, daß dieses Perpendikel im Raume als die Hypothenuse eines rechtwinkligen

Dreieckes anzusehen ist, welches l′S zur einen und den, horizontal in wahrer Größe, als das Perpendikel ll″ auf xy, projicirten Abstand des Scheitels [l, l′] von der vertikalen Projectionsebene, zur andern Kathete hat.

Wenn daher $l'L_0$ perpendikulär zu l′S und gleich ll″ gemacht, hierauf SL_0 gezogen wird, so bedarf es jetzt nur noch der Construction eines Kreisbogens aus dem Mittelpunkte S mit dem Halbmesser SL_0, um im Durchschnitte L des Bogens mit der erweiterten A′B′ die Umklappung des Scheitels zu haben.

Da die vertikalen Tracen F und M′ der Schenkel unseres darzustellenden Winkels unveränderlich sind, so wird man nur noch durch L die Geraden KF und R_0M' zu ziehen brauchen, um in dem Winkel M′LK die wahre Größe des Neigungwinkels der Seiten [ADB, A′D′B′], [ABC, A′B′C′] zu erblicken.

§ 26.

Nachdem durch die Gerade U_0W der Winkel M′LK halbirt worden ist, so verschreite man zur Angabe der Projectionen der halbirenden U_0W. Wäre es möglich, diese Gerade innerhalb der Grenze des Zeichnungsblattes mit der Axe der Umklappung FE′ zum Durchschnitt zu bringen, so würde die Angabe der vertikalen Projection von U_0W nach Zurückführung der Winkelebene ein Leichtes sein. Denn dann hätte man nur diesen Punkt mit l′ zu verbinden, und folgerte hieraus eben so leicht die horizontale Projection.

Mehrere Wege wird es geben, um dennoch, ungeachtet daß jener Punkt nicht auf das Blatt fällt, zum Ziele zu gelangen.

Einer derselben wird in dem Verjüngen der hierbei einschlagenden Dimensionen bestehen. Bringt man diese auf ihre Hälften, dann folgt, daß der Punkt L nach G auf die Mitte von SL, so wie der Punkt l′ nach J, der Mitte von Sl kommen. Indem man nachher GH parallel zu U_0W bis zum Durchschnitt H mit FE′ führt, durch H die Gerade HJ, so wie dieser parallel durch l′, V′Z, so ist hierdurch die vertikale Projection der Halbirenden, nämlich V′Z, bestimmt.

Aus Z, dem Durchschnitt von V′Z mit xy, d. i. der vertikalen Projection der horizontalen Trace der Halbirenden, ist die Projectionslinie ZZ_1 zu ziehen, welche in ihrem Durchschnitte Z_1 mit der horizontalen Trace der, die Halbirende in sich enthaltenden Ebene Z_1NE', nothwendig die horizontale Trace der Halbirenden selbst darstellen wird. Demnach ist durch das Ziehen der Geraden Z_1l die horizontale Projection der Halbirenden bestimmt und folglich diese selbst.

Die Halbirende [Z_1V, ZV′] ist aber eine, in der zweiten Seite des fraglichen Körperwinkels, nämlich in der, durch die Kante [AB, A′B′] gehenden, gelegene Gerade; folglich ein ferneres, diesen Körperwinkel zur Bestimmung dienliches Element.

§ 27.

Bevor wir auf die Erwerbung des dritten dieser Elemente ausgehen, sei noch eines zweiten, zur Darstellung der Halbirenden [Z_1V, ZV′] führenden Verfahrens gedacht.

Da die Geraden FE′, ZV′, U_0W einen gemeinschaftlichen Convergenzpunkt haben, so läßt sich — wie vorher, gestützt auf die Aehnlichkeit der entstehenden Dreiecke — ein Punkt U auf FE′ beliebig wählen, und von ihm aus UT perpendikulär zu FE′ ziehen. Offenbar ist diese die Umklappung und wahre Größe des, aus U zu FE′, in der Ebene Z_1NE' gehenden Perpendikels, welches die vertikale Projection der, durch l′ führenden Halbirungslinie in einem Punkte von UT schneidet. Dieser Punkt V′, also ein zweiter Punkt der Vertikalprojection der Halbirenden, wird gefunden, indem man durch U die Gerade UT, parallel zu SL zieht, solche mittelst eines Kreisbogens aus dem Mittelpunkte U, vom Halbmesser UT, in T_1 schneidet, und aus T_1 auf UT das Perpendikel T_1V' fällt, dessen Fußpunkt V′ dieser zweite Punkt der vertikalen Projection der Halbirenden ist; wie leicht bewiesen werden kann. V′Z stellt jetzt dieselbe dar und gestattet die Folgerung der horizontalen Projection.

Aus U ist die Projectionslinie UU_1 zu ziehen, wodurch auf xy die Horizontalprojection U_1 des Ausgangspunktes jenes, vertikal auf UV′ projicirten Perpendikels zu FE′ erhalten wird. Da nun die horizontale Projection desselben parallel zu S_1l sein muß, so stelle man U_1V als Paralle zu S_1l dar und fälle die Projectionslinie V′V, welche U_1V in V, der horizontalen Projection des zweiten Punktes der Halbirenden trifft. Weil aber ein erster l schon bekannt ist, so ist es die horizontale Projection der Halbirenden selbst dergestalt, daß dieser die Formel [Z_1V, ZV′] zukommt.

Es erübrigt nur noch das dritte, zur Darstellung des, Behufs der Auflösung unsers Problems, zu Hülfe zu ziehenden Körperwinkels, erforderliche Element. Wir bedürfen einer in der, durch die Kante [BC, B′C′] gehenden Seite desselben, enthaltenen Geraden. Diese bietet sich in der Halbirenden eines, den Neigungswinkel der Tetraëderseiten [BCD, A′C′D′], [ABC, A′B′C′] messenden Winkels dar, deren Darstellung im folgenden Paragraph gezeigt werden wird.

§ 28.

Hierzu bedarf es nur einer, durch den Eckpunkt [D, D′] gehenden, und zur Kante [BC, B′C′] perpendikulären Ebene, welche die Seiten derselben in zwei Geraden schneidet, deren Neigung diejenige der Seiten ist. Ein Punkt q″ der vertikalen Trace dieser Ebene ergiebt sich sogleich, indem man Dq_1'' perpendikulär zu BC führt und aus dem Durchschnitte q_1'' mit xy die Projectionslinie $q_1''q''$ erhebt, bis daß solche die Parallele

zu x y durch D′ trifft. Dies geschieht in q″; daher die, durch ihn zu B′ C′ gezogene, x y in q_{II} schneidende Perpendikuläre q″ q_{II} die vertikale, und folglich das Perpendikel q_{II} q_I zu B C die horizontale Trace der, aus [D, D′] zu [B C, B′ C′] perpendikulären Ebene q_I q_{II} q″ sind.

q_{II} q_I schneidet die horizontale Trace p R der Seite [B C D, B′ C′ D′] in q, daher nur die Gerade q D gezogen zu werden braucht, um in ihr die horizontale Projection eines der Schenkel des darzustellenden Winkels zu haben. Vermittelst der Projectionslinie q q′ gelangt man sogleich zur vertikalen Projection q′ D′ dieses Schenkels und bemerkt, daß, zur Bestätigung, die Durchschnitte k, k′ dieser Projectionen beziehentlich mit denen von [B C′ B′ C′] in derselben Projectionslinie k k′ enthalten sein müssen. Dieselben sind die Projectionen des Scheitels unseres fraglichen Winkels.

Da der andere Schenkel desselben nichts Anderes als der Durchschnitt der Ebenen q_I q_{II} q″ und $\alpha\,\beta\,\gamma$ ist, so bedarf es nur der Projectionslinie q_2' q_2 aus dem Durchschnitte q_2' ihrer vertikalen Tracen und des Ziehens der Geraden q_2 q_I zum Durchschnitt q_I der horizontalen Tracen jener Ebenen, um in q_I q_2 die horizontale Projection des zweiten Schenkels zu haben.

Wird ferner die Projectionslinie q_I N bis zum Durchschnitt N mit x y, hierauf N q_2' gezogen, dann zeigt letztere Gerade die Vertikalprojection eben dieses Schenkels an.

Als Prüfung hat man das Hindurchgehen der Projectionen q_I q_2, N q_2' durch die, bereits bestätigten Projectionen k und k′ des Scheitels gelten zu lassen. Ueberdies müssen diese Projectionen diejenigen der Kante [A B, A′ B′] in Punkten i, i′ schneiden, welche im nämlichen Perpendikel zu x y enthalten sind.

Der nun bestimmte Winkel [q_I k D, N k′ D′] ist noch in wahrer Größe darzustellen und zu halbiren.

§ 29.

Die hierzu nothwendige Umklappung der Ebene dieses Winkels werde um deren horizontale Trace q_I q_{II} auf die horizontale Projectionsebene vollbracht. Zieht man q_I D, N D′, die Projectionen der nämlichen, in der Ebene q_I q_{II} q″ liegenden Geraden, so werden dieselben beziehentlich die Projectionen eines Dreieckes [q_I D k, N D′ k′] begrenzen, darin der, der Seite [q_I D, N D′] gegenüberstehende Winkel [q_I k D, N k′ D′] der gesuchte ist.

Die Umklappung von [D, D′] ergiebt sich wie beim ersten Kantenwinkel, durch das Fällen eines Perpendikels aus diesem Eckpunkte des Tetraëders, auf die horizontale Trace q_I q_{II} der Ebene q_I q_{II} q″. Dasselbe projicirt sich horizontal auf das Perpendikel D D_0 zu q_I q_{II} und wird auch in demselben seine Umklappung finden. Indem man, wie früher gezeigt wurde, die wahre Größe dieses Perpendikels gefunden hatte, so ist der Punkt D_0 als Umklappung von [D, D′] erhalten worden.

D_0 ist mit den unverändert bleibenden Punkten q_I, q durch die Geraden D_0 q_I, D_0 q verbunden worden. Erstere zeigt die Umklappung des zweiten Schenkels an, und was diejenige des ersten betrifft, so weiß man, daß der Scheitel [k, k′] des Kantenwinkels auf D_0 q umgeklappt erscheinen muß, aber auch in der Erweiterung von B C, daher er nach k_0 gelangt. Wird endlich noch k_0 q_I gezogen, so stellt diese Gerade die Umklappung des ersten Schenkels, und der Winkel q_I k_0 D_0 die wahre Größe der Neigung der, zur Kante [B C, B′ C′] gehörigen Seiten des Tetraëders dar.

§ 30.

Die Gerade k_0 k_{II} zeigt die Halbirungslinie des Winkels q_I k_0 D_0, welche q_I D_0 in k_{II}, sowie die horizontale Trace q_I q_{II} in ψ schneidet. Zieht man folglich ψ k, so ist diese Gerade die horizontale Projection der Halbirenden, und muß q_I D dergestalt in k_I schneiden, daß, nach Zurückführung der Ebene des Winkels in seine anfängliche Lage, der Punkt k_{II} sich nach k_I versetzt, oder mit andern Worten die Gerade k_{II} k_I perpendikulär zu q_I q_{II} ist.

Anlangend die vertikale Projection dieser Halbirenden, so wird dieselbe sehr zuverlässig durch die, leicht zu bewerkstelligende und im Risse versinnlichte Umklappung der Ebene q_I q_{II} q″ auf die horizontale Projectionsebene erhalten. q_{II} k_{III} stellt die Umklappung der vertikalen Trace q_{II} q″ dieser Ebene dar. Der Punkt k_{III} ist aber auch zugleich der Durchschnitt der, aus dem bekannten Punkte k_{II} parallel zu q_I q_{II} geführten Geraden mit q_{II} k_{III}. Derselbe wird, nach Zurückbringung der Ebene in ihren vorigen Stand, auf q_{II} q″ in der Entfernung k_{III}' q_{II} = k_{III} q in k_{III}' liegen, d. h. im Durchschnitte eines, aus dem Mittelpunkte q_{II} mit dem Halbmesser q_{II} k_{III} construirten Kreisbogens und der vertikalen Trace q_{II} q″ der Ebene q_I q_{II} q″. Vertikal, projicirt sich k_{III} k_{II} in der zu x y parallelen k_{III}' k_I'.

Giebt man daher noch die Horizontalprojection $ψ_I$ durch das Fällen der Projectionslinie ψ ψ, auf x y an, und zieht die Gerade $ψ_I$ D′, so stellt dieselbe die vertikale Projection der Halbirenden dar und wird, bei richtigem Verfahren, k_{III}' k_I' in einem Punkte k_I' schneiden, welcher mit dem schon bestimmten k_I im nämlichen Perpendikel zur Projectionsaxe x y enthalten ist.

ψ k_I, $ψ_I$ k_I' sind folglich die Projectionen des dritten zur Darstellung des, den Mittelpunkt der verlangten Kugel zum Scheitel habenden Körperwinkels, denn sie gehören einer Geraden an, welche auf der durch die Kante [B C, B′ C′] gehenden Seite desselben gelegen ist.

Demnach beschränkt sich das Weitere nur noch auf das Führen einer zur Seite [A B C, A′ B′ C′] des gegebenen Tetraëders parallelen Hülfsebene.

§ 31.

Die Tracen derselben sind parallel zu den Tracen der Ebene jener Seite und in dem Risse durch $\omega\rho$, $\rho\varepsilon$ dargestellt worden. $\omega\rho\varepsilon$ und $\alpha\beta\gamma$ sind in beliebigem Abstande genommene parallele Ebenen.

Suchen wir die Tracen der Halbirenden, der vorher betrachteten Kantenwinkel, mit der Ebene $\omega\rho\varepsilon$ und legen zu dem Ende durch die Halbirende $[d\,u_0, d'\,u_0']$ des Kantenwinkels $[D\,d\,h, D'\,d'\,h']$ eine vertikale, $d\,\pi$ zur horizontalen, das Perpendikel $\pi\,\pi'$ zu $x\,y$ zur vertikalen Trace habende Ebene.

Im Durchschnitte dieser Ebene mit der Ebene $\omega\rho\varepsilon$ erfolgt der Durchgang der bemerkten Halbirenden. Dieser Durchschnitt hat $d\,\pi$ zur horizontalen und die Gerade $\omega_1'\,\pi'$ zur vertikalen Projection, welche durch den Durchkreuzungspunkt π' der vertikalen Tracen, der zwei Ebenen $d\,\pi\,\pi'$, $\omega\rho\varepsilon$, und den Fußpunkt ω_1' der Projectionslinie $\omega_1\,\omega_1'$ in $x\,y$ geht. Der Durchschnitt A_0' von $\omega_1'\,\pi'$ mit $d'\,u_0'$ ist folglich die vertikale Projection der Trace dieser Halbirenden und der Ebene $\omega\rho\varepsilon$.

Bildet man sich ein, es ginge durch diese Trace eine Horizontalebene, so wird sie die, zu $x\,y$ parallele Gerade $A_0'\,A_2'$ zur vertikalen Projection ihres Durchschnittes mit der Ebene $\omega\rho\varepsilon$ haben. Der Durchschnitt A_2' der vertikalen Tracen dieser zwei Ebenen projicirt sich horizontal auf A_2, daher die, zu $\rho\omega$ parallele Linie $A_2\,A_0$ die horizontale Projection der, die fragliche Trace der Halbirenden $[d\,u_0, d'\,u_0']$ in der Ebene $\omega\rho\varepsilon$, ihre Horizontalprojection auf $A_2\,A_0$ hat, in A_0 dem Durchschnitt von $A_2\,A_0$ mit $d\,u_0$, der horizontalen Projection der Halbirenden. Zur Bestätigung wird $A_0\,A_0'$ eine Projectionslinie sein.

Auf dieselbe Weise geschah die Bestimmung der Projectionen $B_0\,B_0'$, $C_0\,C_0'$ bezüglich der Tracen der zwei andern Halbirenden $[k_1\,k, k_1'\,k']$ und $[l\,V, l'\,V']$ in Hinsicht auf die Hülfsebene $\omega\rho\varepsilon$.

§ 32.

Da parallele Ebenen von der nämlichen Ebene in parallelen Geraden geschnitten werden, diesen aber parallele Projectionen entsprechen, so folgt, daß nach dem Ziehen der, zu $A\,C$, $B\,C$, $A\,B$ beziehentlich parallelen Geraden $u\,w$, $v\,w$, $u\,v$ durch die Punkte A_0, B_0, C_0, deren Durchschnitte w, v, u den horizontalen Projectionen der Kanten des, den Kugelmittelpunkt zum Scheitel habenden Körperwinkels angehören werden. Vereinigt man daher diese drei Punkte mit den schon vorhandenen C, B, A derselben Kanten durch die Geraden $w\,C$, $v\,B$, $u\,A$, dann sind diese die horizontalen Projectionen jener drei Kanten, welche — dem Vorangegangen gemäß — einen Punkt o, die Horizontalprojection des Mittelpunktes der verlangten Kugel, gemeinschaftlich haben müssen.

Werden dieselben Constructionen auf die vertikale Projectionsebene vollzogen, d. h. die Parallelen $u'\,w'$, $v'\,w'$, $u'\,v'$ durch die Punkte A_0', B_0', C_0' bezüglich zu $A'\,C'$, $B'\,C'$, $A'\,B'$ geführt, dann leuchtet ein, daß ihre Durchschnitte w', v', u', den vertikalen Projectionen der Kanten des besprochenen Kantenwinkels zukommen und — als Bestätigung — die Geraden $w\,w'$, $v\,v'$, $u\,u'$ Projectionslinien sind. Ferner ist es klar, daß die geradlinigen Verbindenden $w'\,C'$, $v'\,B'$, $u'\,A'$ die Vertikalprojectionen der Kanten des vermittelnden Körperwinkels sind, und ihr Durchschnitt o', die vertikale Projection seines Scheitels, zugleich diejenige des Mittelpunktes der einzuschreibenden Kugel darstellen wird. Bewährt sich der Punkt o', d. h. ist er mit o im nämlichen Perpendikel zu $x\,y$ gelegen, oder was auf Eins hinauskommt, zeigt $o\,o'$ eine Projectionslinie, dann werde sofort zur Bestimmung des Halbmessers der geforderten Kugel verschritten.

§ 33.

Der hierzu führende Weg besteht in der Fällung eines Perpendikels aus $[o, o']$ auf eine der Seitenflächen des gegebenen Tetraëders, z. B. auf $[A\,C\,D, A'\,C'\,D']$. Führt man zu dem Ende aus jenem Scheitel eine, zu dieser Seite perpendikuläre Vertikalebene, so muß in solcher das verlangte Perpendikel, d. i. ein Kugelhalbmesser, enthalten und dessen Fußpunkt in der Tetraëderseite der Berührungspunkt der Kugel mit derselben sein.

Die horizontale Trace $o\,z_1$ dieser Vertikalebene ist nach einem bekannten Satze perpendikulär zur horizontalen Trace $A\,\theta$ der Ebene $A\,\theta\,\eta$ jener Seite, aber auch zugleich die Horizontalprojection des fraglichen Perpendikels; welches zur Vertikalprojection das Perpendikel $o'\,z'$ zu $\theta\,\eta$ hat.

Da im Durchschnitt der Vertikalebene mit der Seitenebene $A\,\theta\,\eta$ der Fußpunkt des Perpendikels aus $[o, o']$ gelegen sein muß, so wird es nur auf die Darstellung desselben ankommen. $o\,z_1$ ist bereits die horizontale Projection desselben, z_1 ein ihr angehöriger Punkt. Ein zweiter Punkt findet sich in z_{II}, der horizontalen Projection der, durch den Eckpunkt $[D, D']$ gedachten, in der Ebene $A\,\theta\,\eta$ liegenden Horizontale $[\eta_{II}\,z_{II}, \eta\,z_{II}']$.

Zieht man daher die Projectionslinien $z_1\,z_1'$, $z_{II}\,z_{II}$ und hierauf $z_1'\,z_{II}'$, so schneidet solche $o'\,z'$ im Punkte z' der vertikalen Projection des Berührungspunktes der einzuschreibenden Kugel, mit der Seite $[A\,C\,D, A'\,C'\,D']$ des gegebenen Tetraëders, und z, der Durchschnitt der Projectionslinie $z'\,z$ mit $o\,z_1$, stellt die horizontale Projection des nämlichen Punktes dar. Hiernach ist die Formel für den Halbmesser $[o\,z, o'\,z']$, woraus dessen wahre Größe leicht gefolgert werden kann.

Hierzu genügt es, die Vertikalebene des Halbmessers um die, in o horizontal und auf $o_0\,o'$ vertikal projicirte Vertikale bis zum Parallelsein zur vertikalen Projectionsebene drehend zu bewegen, so daß ihre horizontale Trace $o\,z_1$ in die zu $x\,y$ parallele Lage $o\,z_0$ übergeht. Hier-

durch gelangt z nach z_0, in den Durchschnitt des, aus dem Mittelpunkte o mit dem Halbmesser o z construirten Kreisbogens und jener Parallele $o z_0$ zu x y. Da während dieser Drehung der Punkt [z z′] seine Horizontalebene, deren vertikale Trace die Parallele $z' z_0'$ zu x y ist, nicht verläßt, so folgt, daß ihr Durchschnitt z′ mit der Projectionslinie $z_0 z_0'$ die vertikale Projection des Punktes [z z′] in seiner neuen Lage ist. Daher stellt die, die Punkte z_0' und o′ verbindende Gerade $z_0' o'$ die wahre Größe des Kugelhalbmessers [o z, o′ z′] dar, womit sogleich die Projectionen der verlangten Kugel beschrieben werden können; welche, wie im besonderen Falle, nichts Anderes sind, als die Projectionen von, zu den Projectionsebenen parallelen größten Kreisen der Kugel.

Der Riß zeigt die Wiederholung dieses Verfahrens, zur Bestimmung der andern Berührungspunkte und Berührungshalbmesser, und, als Bestätigung, die Uebereinstimmung der wahren Größen derselben.

v. Bünau.

Schulnachrichten.

Das Lehrercollegium der Gewerbschule verlor mit Ende des Unterrichtscursus 1850—51 in der Person des Herrn Brandversicherungs-Inspector Kato ein ebenso verdientes als hochgeachtetes Mitglied. Derselbe fand sich durch seine anderweiten umfänglichen Berufsgeschäfte veranlaßt, um seine Entlassung von der Unterrichtsertheilung an der Gewerbschule nachzusuchen, welche ihm durch Verordnung des Königl. Ministeriums des Innern vom 24. April 1851 gewährt wurde.

Durch dieselbe Verordnung wurde der Unterricht in der Bauwissenschaft und im architektonischen Zeichnen an der Gewerbschule, welchen bisher Herr Brandversicherungs-Inspector Kato ertheilt hatte, dem Lehrer an der Baugewerkenschule, Herrn Conradi, interimistisch übertragen.

Nachdem bei den praktisch-chemischen Arbeiten im Laboratorium der Gewerbschule die Frequenz in den letzten Jahren immer größer geworden war, und für das Winterhalbjahr 1851—52 sich die Nothwendigkeit herausgestellt hatte, diese Arbeiten an fünf Nachmittagen in jeder Woche stattfinden zu lassen, und da andererseits es als angemessen erschien, dem Unterzeichneten, welcher, im Winterhalbjahr unter Beihülfe des Lehrers Herrn Knop, diese Arbeiten bisher geleitet hatte, in Rücksicht auf seine sonstigen vielfachen Geschäfte, die fortlaufende directe Unterrichtsertheilung bei den praktisch-chemischen Arbeiten abzunehmen, wurde von der Gewerbschulcommission bei dem Königl. Ministerium des Innern beantragt, es möge ein besonderer Hülfslehrer für die praktisch-chemischen Arbeiten angestellt werden, welcher der fortlaufenden Unterrichtsertheilung bei denselben sich zu unterziehen, in Bezug auf die Auswahl der Arbeiten für die einzelnen Schüler aber nach einem mit dem Unterzeichneten zu verabredenden Plane zu verfahren habe, und wobei der Unterzeichnete zugleich noch in solchem Umfange an dem Unterricht im Laboratorium sich betheiligen solle, daß er die in demselben ausgeführten Arbeiten fortwährend übersehe, und die einzelnen Schüler, namentlich die der ersten und zweiten Classe, rücksichtlich ihrer Fortschritte in der praktischen Chemie im Auge behalte. Durch Verordnung vom 20. September 1851 wurde Seitens des Königl. Ministeriums des Innern dieser Antrag genehmigt, und zugleich, auf Vorschlag Seitens der Gewerbschulcommission, Herr Carl Alexander Müller aus Gablenz bei Chemnitz, bis dahin Assistent und Repetent für Chemie an der polytechnischen Schule zu Stuttgart, provisorisch als Lehrer für die praktisch-chemischen Arbeiten an der Gewerbschule angestellt, welcher beim Beginn des Winterhalbjahrs 1851—52 als solcher eintrat. Im December 1851 erwarb sich dieser neue Lehrer den Doctorgrad bei der philosophischen Facultät zu Leipzig.

Während der drei Monate October, November und December 1851 ertheilte, in Gemäßheit Hoher Verordnung, der Mechaniker Herr Gustav Anton Zeuner aus Chemnitz in Stellvertretung des Gewerbschullehrers Herrn Brückmann, dessen geschwächte Gesundheit es nothwendig machte, ihm zeitweilig einen Theil seiner Unterrichtsstunden abzunehmen, an der Gewerbschule den Unterricht in der Mechanik und im Maschinenzeichnen.

Zwei Lehrer der Anstalt, Herr Professor Stöckhardt und Herr Brückmann, machten, mit Hülfe einer von dem Königl. Ministerium des Innern ihnen dazu verliehenen Unterstützung, während der Sommerferien des verflossenen Jahres eine Reise nach England, um die Industrie-Ausstellung in London zu besuchen, und der erstere zugleich, um den landwirthschaftlichen Betrieb in England und Schottland durch eigene Anschauung näher kennen zu lernen.

Der erweiterte Lehrplan der Gewerbschule, wie er bereits im letzten Programme mitgetheilt wurde, hat in dem abgelaufenen Unterrichtscursus zum ersten Male vollständig durchgeführt werden können, weil die letzten Schüler, welche noch nach dem früheren Lehrplan unterrichtet wurden, mit Ende des Cursus 1850—51 die Anstalt verließen, und nunmehr sämmtliche Zöglinge derselben den früheren Unterricht in Gemäßheit des gegenwärtigen Lehrplans empfangen hatten. Es ist namentlich in diesem Unterrichtsjahr der fortgesetzte mathematische Unterricht in der ersten Classe und der Unterricht in descriptiver Geometrie in derselben Classe, so wie der Unterricht in englischer Sprache und ein besonderer Cursus in Mineralogie und Geognosie, deren bereits im

letzten Programme Erwähnung geschah, ins Leben getreten. Einige kleine Aenderungen, welche der Lehrplan erlitt, sind aus dem im Nachstehenden gegebenen Abdruck desselben ersichtlich.

In dem abgelaufenen Schuljahr ist auch der landwirthschaftliche Fachunterricht an der Gewerbschule zum ersten Male in dem planmäßigen Umfange ertheilt worden. An diesem Unterricht betheiligten sich 27 Schüler. Außerdem zählte die vierte Classe noch 25 Schüler, welche der Landwirthschaft sich widmen wollen, und die erst von Beginn des bevorstehenden Cursus an in den landwirthschaftlichen Fachunterricht eintreten. Die Gesammtzahl der künftigen Landwirthe (mit Einschluß zweier Schüler, die dem Forstfach sich widmen wollen) an der Gewerbschule betrug also im abgelaufenen Cursus 52, welche Zahl 27,96 Procent der Gesammtfrequenz ausmacht.

Die Lehrmittel der Gewerbschule wurden in dem abgelaufenen Schuljahr durch Anschaffung neuer wesentlich vermehrt. Dies gilt vorzüglich von den Lehrmitteln für den landwirthschaftlichen Unterricht, indem namentlich die wichtigeren landwirthschaftlichen Geräthe und Maschinen, theils in natura, theils in instructiven Modellen, angeschafft und auch außerdem die Lehrmittel für den landwirthschaftlichen Unterricht in mehrfacher Hinsicht vermehrt und vervollständigt wurden. Die bereits im vorigen Schuljahr begonnene Umwandlung des das Gewerbschulgebäude umgebenden Grundstücks in einen landwirthschaftlich-botanischen Garten wurde in diesem Jahre weiter fortgesetzt und auf demselben bereits eine Anzahl seltnerer landwirthschaftlicher Culturgewächse in kleineren Mengen angebaut.

Von dem Königl. Ministerium des Innern wurde der Gewerbschule ein Exemplar des „Official Catalogue of the great exhibition, saxon section" —, von dem statistischen Bureau des Königl. Ministeriums des Innern ein Exemplar der ersten Lieferung der „Bevölkerungsstatistik des Königreichs Sachsen, nach der Zählung vom 3. December 1849", zur Aufnahme in die Bibliothek der Anstalt zugestellt. Außerdem erhielt die Gewerbschule an Geschenken: Vom Herrn Advokat Fallou in Waldheim eine Himmelskugel und ein Sortiment Mineralien und Gebirgsarten, — vom Herrn Rittergutsbesitzer Gadegast auf Thal bei Oschatz Proben von Schafwolle, — vom Herrn Oekonomie-Inspector Winkler zu Lichtenwalde ebenfalls Proben von Schafwolle, — vom Herrn Coloristen Lange in Eilenburg ein gedrucktes Rouleaux-Muster, — von den Herren Arnecke und Schöpff in Chemnitz 9 Stück Tapetenproben auf den verschiedenen Stufen der Anfertigung, — von der Direction der Königl. polytechnischen Schule in Dresden ein Exemplar des gedruckten Catalogs der Bibliothek dieser Anstalt, — von dem Herrn Gewerbschullehrer Kohl in Plauen ein Exemplar der zweiten Abtheilung seiner Maschinen-Elemente nebst einem die Abbildungen derselben enthaltenden Tableau, — vom Herrn Gustav Dörstling in Chemnitz eine Probe von Krappwurzel, — vom Herrn Buchhändler C. A. Haendel in Leipzig ein Exemplar von „Bourne's Catechismus der Dampfmaschinenlehre, deutsch bearbeitet von Hartmann", und ein Exemplar des Werkes „Anfangsgründe der Mechanik. Nach dem Englischen bearbeitet von Hartmann", — vom Herrn Richard Hartmann in Chemnitz eine französische Wasser-Filtrir-Flasche, — vom Herrn Papierfabrikanten von Otto zu Bautzen ein Sortiment der in seiner Fabrik erzeugten Papiere, — vom Herrn Professor Stöckhardt in Chemnitz ein Exemplar seiner Schrift über die Drainage, — von dem landwirthschaftlichen Verein zu Chemnitz ein westindisches Haken-Schaar, — von dem Herrn Farbenmeister Hesse zu Schindler's Blaufarbenwerk ein Sortiment Mineralien. Für diese Geschenke wird den freundlichen Gebern hier Namens der Anstalt wiederholt der herzlichste Dank ausgesprochen.

Durch Verordnung vom 3. Mai 1851 verlieh das Königl. Ministerium des Innern auf Antrag der Schulcommission einem Zögling der Gewerbschule ein Stipendium von monatlich 5 Thalern auf den ganzen Unterrichtscursus, und durch Verordnung vom 24. Juni 1851 einem andern Gewerbschüler ein Stipendium von gleicher Höhe auf die Zeit vom 1. Juli 1851 bis Ende März 1852. Durch Verordnung vom 6. November 1851 verlieh Dasselbe zwei andern Gewerbschülern und zwei Baugewerkenschülern Stipendien von respective 2, 3, 4 und $2\frac{1}{2}$ Thalern monatlich auf das Winterhalbjahr, und durch Verordnung vom 19. Januar 1852 einem Baugewerkenschüler ein Stipendium von monatlich $3\frac{1}{2}$ Thalern auf die letzte Hälfte desselben.

Außerdem wurde durch Verordnung vom 3. Mai 1851 dem bisherigen Gewerbschüler Heinrich Hermann Bergmann aus Waldheim ein Stipendium von 50 Thalern verliehen, mit dessen Hülfe derselbe noch bis Michaelis 1851 an der Gewerbschule verblieb, um als Assistent für den chemischen Unterricht verwendet zu werden. Von Michaelis an würde, da Bergmann alsdann die Anstalt verließ, dem Schüler der ersten Classe, August Hermann Seyferth aus Langensalza, die Assistenzleistung im Laboratorium, insoweit als dieselbe mit dessen Unterrichtsstunden vereinbar war, übertragen, und demselben durch Hohe Verordnung vom 18. September 1851 dafür ein Stipendium von 25 Thalern für die Dauer des Winterhalbjahres verliehen.

Am Schlusse der Prüfung zu Ostern vorigen Jahres wurden an Zöglinge der Anstalt folgende Auszeichnungen ertheilt:

die silberne Preismedaille:

den Gewerbschülern Carl Ehregott Gaitzsch und August Hermann Seyferth; und

den Baugewerkenschülern Eduard Hermann Wolf, Ernst Louis Krumbiegel, Eduard Oswald Röhling und Johann Immanuel Steinbach;

die bronzene Preismedaille:

den Gewerbschülern Heinrich Hermann Bergmann, Hermann Günther, Christian Ferdinand Louis Jungmichel, Friedrich August Kluge, Emil Alwin Gottschaldt, Richard Carl Hermann Brunnquell, Otto Theodor Hermann Uhle, Adolph Leberecht Eisemann, Max Emil Herm. Weißwange und Emil Heinr. Otto Pohl; und den Baugewerkenschülern Carl Heinrich Ernst Gräfe, Friedrich Wilhelm Teichmann, Carl Heinrich Findeisen, Heinrich Wilhelm Adolph Lippmann, August Julius Bochmann, Leopold Friedrich Anton und Johann Gottlob Kahl;

Belobungsdecrete:

25 Zöglingen der Gewerbschule, einem Zögling der Fabrikzeichnenschule und 13 Zöglingen der Baugewerkenschule.

Nach vollständig beendetem Cursus verließen zu Ostern 1851 folgende Zöglinge die Gewerbschule, mit den beigesetzten Gesammtcensuren in Kenntnissen und im Verhalten:

Aus der ersten Classe:

Heinrich Hermann Bergmann aus Waldheim, I^b. I. (blieb bis Michaelis 1851 noch als Assistent für Chemie an der Gewerbschule und erhielt dann eine Anstellung in einer Runkelrübenzucker-Fabrik).

Hermann Günther aus Kirchberg, I^b. I. (widmete sich der Landwirthschaft).

Christian Ferdinand Louis Jungmichel aus Schlettau, I^b. I. (widmete sich dem Baufach).

Friedrich August Kluge aus Ehrenhayn, I^b. I. (widmete sich dem Baufach).

Emil Robert Lauckner aus Chemnitz, III. II. (widmete sich dem Spinnereibetriebe).

Heinrich Richard Lauckner aus Chemnitz, II^b. I^b. (widmete sich dem Maschinenbau).

Gustav Albin Niedner aus Kötzschau, II^b. I. (widmete sich der Landwirthschaft).

Carl Gustav Riedig aus Chemnitz, II. I. (trat bei einem Mechanikus in die Lehre).

Carl Hugo Schulz aus Einsiedel, II. I. (widmete sich dem Forstfach und bezog die Akademie zu Tharand).

Emil Alwin Gottschaldt aus Chemnitz, I^b. I. (widmete sich dem Baufach).

Carl Anton Schiffner aus Glauchau, II. I^b. (wollte sich dem Hüttenwesen widmen und bezog die Bergakademie in Freiberg).

Richard Carl Hermann Brunnquell aus Weimar, I^b. I. (bezog die Universität zu Leipzig, um Chemie zu studiren).

Carl Ehregott Gaitzsch aus Tautendorf, I. I. (widmete sich dem Mühlenbetriebe).

Carl Emil Steinbach aus Werdau, II. I. (widmete sich dem Maschinenbau).

Aus der zweiten Classe:

Moritz Christian Eisenstuck aus Annaberg, II. I. (widmete sich der Landwirthschaft).

Hermann Christoph Huth aus Berndorf, II^b. I^b. (widmete sich der Landwirthschaft).

Im Laufe des Unterrichtscursus 1851—52 ging (abgesehen von dem chemischen Assistenten, welcher die Anstalt um Michaelis verließ) aus der ersten Classe kein Schüler ab.

Aus der zweiten Classe gingen, ohne ihren Unterrichtscursus vollständig beendet zu haben, ab:

zu Ostern 1851	1 Zögling,
im Laufe des Unterrichtscursus 1851—52	5 Zöglinge,
zusammen:	6 Zöglinge.

Von diesen widmeten sich, insoweit es der Schuldirection bekannt wurde, 2 dem Maschinenbau, einer der Tuchfabrikation, einer dem Zeugdruck, einer der Färberei und einer der Landwirthschaft.

Aus der dritten Classe gingen ab:

zu Ostern 1851	11 Zöglinge,
im Laufe des Unterrichtscursus 1851—52 (außer einem Zuhörer)	7 „
zusammen:	18 Zöglinge.

Von diesen gingen 2 zur Landwirthschaft, 2 zum Mühlenbetriebe, einer zum Kaufmannsfach, einer zum Spinnereibetriebe, einer zur Gelbgießerei, einer zum Kupferschmiedehandwerk, einer zum Baufach, einer zum Maschinenbau und einer zur Marine über; 2 waren bereits Bauhandwerker, einer war Apotheker-, 2 Droguistenlehrlinge, und 2 wollten sich dem Militairfach widmen.

Aus der vierten Classe gingen ab:

zu Ostern 1851	10 Zöglinge,
im Laufe des Unterrichtscursus 1851—52	6 „
zusammen:	16 Zöglinge.

Von diesen widmeten sich 5 dem Kaufmannsfach, 3 der Landwirthschaft, 2 den Bauhandwerken, einer dem Maschinenbau, einer der Weberei, einer dem Seilerhandwerk, einer wollte sich zur Universität vorbereiten, und 2 hatten noch keinen bestimmten Beruf gewählt.

Im Cursus 1851—52 traten in die Gewerbschule 109 neue Zöglinge ein, nämlich 3 in die zweite, 20 in die dritte, 78 in die vierte Classe, 2 in den Fabrikzeichnenunterricht, und 6 (von denen einer im Laufe des Cursus wieder abging) für den Unterricht in Mathematik und in deutscher Sprache an der Baugewerkenschule, um dadurch für den Eintritt in die vierte Classe der Gewerbschule zu Ostern 1852 sich vorzubereiten. Die Gesammtzahl der in das Schülerbuch der Gewerbschule eingetragenen Zöglinge stieg hierdurch auf 989.

Die Frequenz der Gewerbschule betrug im Unterrichtscursus 1851—52 überhaupt:

5 in Cl. I. (einschließlich eines Assistenten für den chemischen Unterricht)
21 = = II.
64 = = III. (einschließlich eines Zuhörers)
41 = = IV^a.
42 = = IV^b.
7 im Fabrikzeichnenunterricht (ausschließlich 42 Gewerbschülern).
6, welche durch Benutzung des Unterrichts in Mathematik und deutscher Sprache an der Baugewerkenschule sich für den Eintritt in die Gewerbschule vorbereiteten.

186 zusammen.

Die Frequenz der einzelnen Classen zu Anfang und zu Ende des Cursus war folgende:

	zu Anfang des Cursus:	zu Ende des Cursus:
in Cl. I.	5	4
= = II.	20	15
= = III.	58	56
= = IV^a.	33	37
= = IV^b.	33	40
im Fabrikzeichnen	5	6
bei dem Unterricht in Mathematik u. in deutscher Sprache an der Baugewerkenschule		5
zusammen:	154	163

Die Frequenz der Baugewerkenschule betrug im Unterrichtscursus 1851—52:

29 in der oberen Classe, darunter 10 Repetenten;
30 in der unteren Classe,

59 zusammen.

Unter diesen befinden sich 25 neu Eingetretene, welche sämmtlich in die untere Classe aufgenommen wurden. Die Gesammtzahl der in das Schülerbuch der Baugewerkenschule eingetragenen Zöglinge stieg durch deren Eintritt auf 353.

Hiernach traten im Unterrichtscursus 1851—52 in die beiden vereinigten Lehranstalten 134 neue Zöglinge ein, und die Gesammtfrequenz an denselben betrug 245 *).

Unterrichtsplan

bei der Gewerb- und Baugewerkenschule.

I. Gewerbschule.

Vierte Classe (in zwei Parallelabtheilungen IV^a. und IV^b.).

Gemeinschaftlicher Unterricht für alle Zöglinge dieser Classe.

1) **Allgemeine Arithmetik** (wöchentlich 4 Stunden, mit Benutzung von Tellkampf's Vorschule der Mathematik, welches Buch auch bei dem mathematischen Unterricht in den folgenden Classen benutzt wird). Die vier Grundoperationen der Buchstabenrechnung, die Gleichungen des ersten Grades mit einer Unbekannten, Ausziehen der Quadrat- und Cubikwurzel. — 2) **Zahlenrechnen** (2 Stunden), theils auf dem Papier, theils Kopfrechnen. Uebungen im Rechnen mit Ziffern im Allgemeinen, Zinsenrechnung, Kettenrechnung, Gesellschafts- und Vermischungsrechnung u. s. w. — 3) **Geometrie** (4 Stunden). Die Grundbegriffe, das Dreieck, Viereck, Vieleck, der Kreis, die Lehre von der Aehnlichkeit und die Flächenberechnung. — 4) **Physik** (4 Stunden, mit Benutzung von Müller's Grundriß der Physik). Allgemeine Einleitung in die Naturlehre, Abriß der Astronomie, der physischen Geographie und der Klimatologie, die Lehre von der Wärme, dem Magnetismus und der Elektricität. — 5) **Naturgeschichte** (4 Stunden, nach Fürnrohr's Grundzügen der Naturgeschichte). Im Sommerhalbjahr allgemeine und specielle Botanik, mit besonderer Berücksichtigung der für die Praxis wichtigen Pflanzen, nebst einem Abriß der Pflanzenphysiologie, im Winterhalbjahr in entsprechender Art Zoologie nebst einem Abriß der Anatomie und Physiologie des Thierreichs. — 6) **Freies Handzeichnen** (6 Stunden), nach geometrischen Körpern, nach Gypsmodellen und nach Vorlegeblättern; Ausführung in Bleistift, Kreide, Tusche, vorzüglich in Contouren. — 7) **Geometrisches Zeichnen** (4 Stunden). Darstellungen in der Ebene nach gegebenen Maaßen; Darstellungen von Körpern zwischen zwei Projectionsebenen in verschiedener Stellung, einzeln oder mit einander combinirt; Schraubenconstructionen. Mit den Darstellungen sind immer die entsprechenden Tuschübungen verbunden. — 8) **Deutsche Sprache** (4 Stunden, nach Götzinger's deutscher Sprachlehre für Schulen). In Cl. IV^b, in welche Abtheilung namentlich solche Schüler aufgenommen werden, die in der Orthographie noch zurück sind, sind wöchentlich 2 Stunden zu orthographischen und stylistischen Uebungen bestimmt, während eine Stunde zu Uebungen im mündlichen Vortrag und eine zu dem grammatischen Unterricht verwendet wird. In Cl. IV^a, in welcher die Schüler durchgehends besser vorgebildet sind, 2 Stunden Grammatik (Laut- und Wortlehre), eine Stunde Uebungen im mündlichen, eine im schriftlichen Gedankenausdruck.

Dritte Classe.

a) Gemeinschaftlich für Mechaniker (mechanische und mechanisch-chemische Techniker *)), Chemiker und Landwirthe:

9) **Arithmetik** (4 Stunden). Gleichungen des ersten Grades mit mehreren Unbekannten, diophantische

*) Die hiesige, mit der Gewerbschule nicht in Verbindung stehende, von dem Handwerkerverein zu Chemnitz unterhaltene Sonntagsschule hatte, zufolge der veröffentlichten Uebersicht, im letzten Quartal des Jahres 1851 1026 Schüler, von denen 292 Gesellen und 734 Lehrlinge waren.

*) Unter der Bezeichnung „Mechaniker" sind hier alle diejenigen Zöglinge verstanden, welche nach Maaßgabe ihres künftigen Berufs an dem Unterricht in der Mechanik und Maschinenlehre Theil zu nehmen haben und deshalb einen vierjährigen Cursus an der Anstalt durchmachen. Diese lassen sich im Allgemeinen in zwei Abtheilungen bringen, nämlich solche, die einem

Aufgaben, Gleichungen vom zweiten Grade, Potenzen, Logarithmen, logarithmische Gleichungen, arithmetische und geometrische Reihen, Zinseszinsrechnung. — 10) **Geometrie** (4 Stunden). Stereometrie, ebene Trigonometrie, Anwendung der Algebra auf die Geometrie. — 11) **Kaufmännisches (Geschäfts-) Rechnen** (2 Stunden, für die Landwirthe blos im Winterhalbjahr in einem besondern Cursus). — 12) **Physik** (3 Stunden, mit Benutzung von Müller's Grundriß). Akustik; Optik; die mechanischen Lehren der Physik in Bezug auf starre, tropfbarflüssige und luftförmige Körper. — 13) **Allgemeine Chemie** (Experimentalchemie), (4—5 Stunden, nach Stöckhardt's Schule der Chemie). Anorganische Chemie: Chemische Grundbegriffe; Stöchiometrie; Abhandlung der einzelnen Grundstoffe und ihrer wichtigsten Verbindungen, mit steter, jedoch nur andeutungsweiser Berücksichtigung der Beziehungen, in denen dieselben zum praktischen Leben stehen, überall unterstützt durch die geeigneten Experimente und durch Vorzeigen der betreffenden Stoffe. Organische Chemie: Abhandlung der wichtigeren Pflanzen- und Thierstoffe (Pflanzenfaser, Stärke, Zucker, organische Säuren und Basen, Oele, Fette, Harze, Farbstoffe, Knochen, Fleisch, Blut, Milch, Harn, Excremente, Producte der Gährung, Verwesung, Fäulniß, der trocknen Destillation u. s. w.) hinsichtlich ihrer Eigenschaften, Gewinnung und Benutzung, wie auch nach ihren Beziehungen zu dem lebenden Pflanzen- und Thierkörper. — 14) **Bauwissenschaft** (2 Stunden, nach Heine's bürgerlicher Baukunst). Darstellung der Grundregeln für alle Bauführungen; Hauptverbindungen; die Haupttheile der Gebäude, die Anlage und Eintheilung derselben; Construction der Feuerungen, der Backöfen, Ziegelöfen, Kalköfen, Malzdarren u. s. w. — 15) **Deutsche Sprache** (4—6 Stunden, nach Götzinger). 2 Stunden Grammatik (Satz- und Styllehre, nebst der Lehre von den Satzzeichen), 2 Stunden mündliche und schriftliche Uebungen. Die minder geübten Schüler der Classe haben außerdem noch 2 Stunden wöchentlich orthographische und Leseübungen.

b) Für Mechaniker:

16) **Projectionslehre** (6 Stunden, nach Dr. v. Bünau's Elementen der Projectionslehre). Projection einfacher Linien, Flächen und Körper, von Körperdurchdringungen; isometrische, monodimetrische und anisometrische Projection; Ausführung der Zeichnungen mit Tusche; Herstellung von Körperformen aus gefertigten Flächennetzen. — 17) **Praktische Geometrie** und 18) **Planzeichnen.** (Im Sommer entweder 2 oder 4 Stunden Vortrag nach Dr. v. Bünau's Vorschule der praktischen Geometrie, oder einen Nachmittag praktische Uebungen auf dem Felde, im Winterhalbjahr 2 Stunden Planzeichnen). Aufnehmen mit Kette und Meßtisch, der Boussole, Nivelliren, Abtragen, Berechnen und Theilen der Vermessungen; barometrisches Höhenmessen. Die Uebungen werden von den Schülern gruppenweise zu drei bis vier vollzogen, unter Benutzung der Instrumente der Anstalt, und bestehen hauptsächlich in Aufnahmen abgegrenzter, nicht allzu umfänglicher Grundstücke, in Verbindung mit Nivellements zur Darstellung von Erdprofilen u. s. w. Das Planzeichnen umfaßt hauptsächlich die graphische Darstellung von Ländereien und es erfolgt bei diesem Unterricht zugleich die Ausführung und das Copiren der während des Sommers vollendeten Aufnahmen. — 19) **Freies Handzeichnen** (im Sommerhalbjahr 6, im Winterhalbjahr 4 Stunden), wie in Cl. IV, jedoch Uebergang zu Ausarbeitung der Zeichnungen mit gehöriger Vertheilung von Licht und Schatten. — Die mechanisch-chemischen Techniker betheiligen sich außerdem, nach Befinden unter Verringerung der Unterrichtsstunden in Nr. 19, während des Winterhalbjahres in wöchentlich 4 Stunden an dem Unterricht Nr. 22.

c) Für Chemiker:

20) **Mechanische Technologie** (2 Stunden, nach dem Grundriß der mechanischen Technologie von Karmarsch). Erster Theil des zweijährigen Cursus, welcher die Gewinnung und Verarbeitung der Metalle, die Verarbeitung des Holzes und die der spinn- und webbaren Fasern als hauptsächlichste Unterrichtsgegenstände umfaßt. — 21) **Mineralogie und Geognosie** (2 Stunden). Im Sommerhalbjahr Mineralogie, im Winterhalbjahr Geognosie, beide mit specieller Rücksichtnahme auf ihre Beziehungen zu der Landwirthschaft und den Gewerben, so wie auch auf die chemische Analyse der Mineralkörper, abgehandelt. — 22) **Praktisch-chemische Arbeiten im Laboratorium** (8 Stunden während des Winterhalbjahrs). Uebungen in der Ausführung chemischer Operationen im Allgemeinen; Darstellung und Untersuchung der für die Gewerbe oder für die Landwirthschaft wichtigen Stoffe; Uebungen in der analytischen Chemie. Die Arbeiten, zu denen die Materialien und Apparate von der Anstalt geliefert werden, werden für jeden Schüler nach Maß-

---

rein oder vorherrschend mechanischen Gewerbszweige, z. B. dem Maschinenbau, dem Spinnereibetriebe 2c., sich widmen wollen und deshalb umfassendere chemische Kenntnisse entbehren können, und solche, die für die künftige Ausführung ihres Gewerbes ebenso sehr oder noch mehr auf die Kenntniß der Chemie angewiesen sind, die aber, weil bei demselben in ausgedehnterem Maaße die Anwendung von Maschinen stattfindet, auch der Kenntniß der Mechanik und Maschinenlehre nicht entbehren können oder doch dieselbe sich anzueignen gesonnen sind, z. B. künftige Druckereibesitzer, Zuckerfabrikanten 2c. Diese beiden Abtheilungen, für welche das Unterrichtsmaterial hier und da etwas verschieden anzuordnen ist, sind im Vorstehenden durch die Bezeichnungen „mechanische Techniker" und „mechanisch-chemische Techniker" unterschieden, während diejenigen Zöglinge, welche einem vorherrschend chemischen und nicht mit Anwendung zusammengesetzterer Maschinen betriebenen Gewerbe sich widmen wollen, und die deshalb an dem Unterricht in der Mechanik und Maschinenlehre nicht Theil nehmen und nur drei Jahre auf der Anstalt verbleiben (chemische Techniker), z. B. Färber, Seifensieder, Gerber 2c., kurzweg als „Chemiker" bezeichnet sind.

gabe seiner Kenntnisse und seines künftigen Berufs ausgewählt. Ueber die ausgeführten Arbeiten führen die Schüler ein Protokoll. — Außerdem betheiligen sich die Chemiker an dem Unterricht Nr. 19, und zwar im Sommerhalbjahr in wöchentlich 6, im Winterhalbjahr in wöchentlich 2 Stunden. Die Unterrichtsgegenstände Nr. 17 und 18 sind für die Chemiker facultativ.

d) Für Landwirthe:

23) **Viehzucht** (2 Stunden). Allgemeiner Theil. Anatomische und physiologische Einleitung; Gesundheitspflege; die Lehre von der Züchtung, Ernährung und Erhaltung der Thiere. — 24) **Pflanzenbaulehre** (2 Stunden, im Sommerhalbjahr). Allgemeiner Theil. Einfluß des Climas und Bodens auf die Entwickelung der Culturpflanzen; Erzeugung, Fortpflanzung und Krankheiten derselben; Culturmittel, Saat, Pflege, Erndte und Aufbewahrung. — Außerdem haben die Landwirthe im Sommerhalbjahr in wöchentlich 2 Stunden Unterricht im freien Handzeichnen, betheiligen sich an den landwirthschaftlichen Excursionen und Culturversuchen (Nr. 41) und nehmen Theil an den Unterrichtsgegenständen Nr. 17, 18, 21, ferner an dem Unterricht Nr. 20, in so weit derselbe auf für den Landwirth wichtige Gegenstände sich bezieht, so wie, in wöchentlich 4 Stunden während des Winterhalbjahrs, an dem Unterricht Nr. 22.

Zweite Classe.

a) Gemeinschaftlich für Mechaniker, Chemiker und Landwirthe:

Außer Nr. 20 (in so weit dieser Unterricht für die Landwirthe in Betracht kommt) sind hier aufzuführen:

25) **Deutscher Sprachunterricht** (4 Stunden). 2 Stunden Literaturgeschichte und 2 Stunden Uebungen wie in Cl. III. — 26) **Architektonisches Zeichnen** (2 Stunden, für die Landwirthe blos während eines halben Jahres). Uebung im Zeichnen architektonischer Details, im Copiren und Entwerfen von Bauplänen.

b) Für Mechaniker:

27) **Allgemeine Arithmetik** (4 Stunden). Figurirte Zahlen, höhere arithmetische Reihen, Gleichungen des dritten Grades, Combinationslehre, Binomial-, Exponential-, logarithmische und trigonometrische Reihen, Taylor's Reihe, größte und kleinste Werthe der Functionen, Methode der kleinsten Quadrate. — 28) **Geometrie** (3 Stunden). Sphärische Trigonometrie, analytische Geometrie. — 29) **Mechanik** (im Sommerhalbjahr 4, im Winterhalbjahr 6 Stunden). Die Lehre vom Gleichgewicht und der Bewegung fester, tropfbarflüssiger und luftförmiger Körper, in solcher Ausführlichkeit, wie die spätere Anwendung in der Maschinenlehre sie verlangt. — 30) **Maschinenzeichnen** (im Sommerhalbjahr 6, im Winterhalbjahr 4 Stunden). Mechanisch-geometrische Constructionen (Verzahnungen, Geradführungen u. s. w.), Zeichnen von Maschinentheilen und einfacheren Bewegungs- und ausübenden Maschinen nach Vorlegeblättern, Skizzen mit eingeschriebenen Maßen und Modellen; Entwerfen von Maschinentheilen, gangbaren Zeugen und dgl. — 31) **Perspective** (2 Stunden, nach Dr. v. Bünau's Lehrbuch). Perspectivische Darstellung von Punkten, Linien, Flächen und Körperformen im Raume, unter Hinzufügung des Schattens für Sonnen- oder Lampenbeleuchtung; Spiegelbilder jener Raumgestalten. — 32) **Freies Handzeichnen** (4 Stunden), wie in Cl. III, mit weiterer Ausführung. Außerdem betheiligen sich die Mechaniker an dem Unterricht Nr. 21, und facultativ nochmals an Nr. 17 und 18. Die mechanisch-chemischen Techniker nehmen außerdem, nach Befinden unter Dispensation von Nr. 31 und Verringerung der Unterrichtsstunden in Nr. 30 und 32, an den praktisch-chemischen Arbeiten (Nr. 34) Theil. Unter Umständen können dieselben auch von den Unterrichtsgegenständen Nr. 27 und 28 dispensirt werden, und dafür schon in Cl. II an dem Unterricht in der technischen Chemie (Nr. 33) Theil nehmen.

c) Für Chemiker:

33) **Technische Chemie** (5 Stunden, nach Köhler's Chemie in technischer Beziehung). Das ganze Gebiet der Chemie wird hier nochmals durchgegangen, und dabei das chemische Wissen und das chemische Urtheil der Schüler nach allen Seiten hin zu befestigen und zu erweitern gestrebt; zugleich wird das für die Anwendung Wichtige vorzugsweise berücksichtigt und eine Darstellung der wichtigeren, vorzugsweise auf chemischen Principien beruhenden Gewerbe gegeben, indem diese bei Abhandlung der betreffenden Stoffe, z. B. die Thonwaarenfabrikation bei der Thonerde, die Färberei und Druckerei bei den Farbstoffen ꝛc., eingeschoben werden. Zugleich werden bei diesem Unterricht die hauptsächlichsten Waaren und Producte (z. B. Brennstoffe, Färbematerialien, Nahrungsstoffe ꝛc.) an passender Stelle mit abgehandelt. — 34) **Praktisch-chemische Arbeiten** im Laboratorium (8—12 Stunden), wie in Cl. III, nur mit speciellerer Auswahl der Arbeiten je nach dem Beruf der einzelnen Schüler. Außerdem betheiligen sich die Chemiker an Nr. 32 und facultativ an Nr. 30 und 42, und nehmen überdies, sofern es in Rücksicht auf die bereits erlangten Kenntnisse für sie als nützlich erscheint, nochmals an dem Unterricht Nr. 13 und Nr. 21 Theil.

d) Für Landwirthe:

35) **Boden- und Düngerlehre** (2 Stunden). Betrachtung des Bodens und der verschiedenen auf seine Beschaffenheit Einfluß habenden Umstände; Classification der Bodenarten, mit besonderer Berücksichtigung des für die sächsische Grundsteuer-Abschätzung angenommenen Modus; Betrachtung der natürlichen und künstlichen Düngestoffe, ihrer Wirkung und Anwendung. — 36) **Pflanzenbaulehre** (im Sommerhalbjahr 3, im Winterhalbjahr 2 Stunden). Specieller Theil. Die Lehre von dem Anbau der Nutzpflanzen im Einzelnen, mit Einschluß

des Wiesenbaues, des Weinbaues und der Obstbaumzucht, nebst einem kurzen Abriß des Waldbaues. — 37) **Viehzucht** (2 Stunden). Specieller Theil. Die Rindvieh-, Pferde-, Schaf- und Schweinezucht, und, in minderer Ausführlichkeit, die Ziegen-, Federvieh-, Fisch-, Seidenraupen- und Bienenzucht. — 38) **Landwirthschaftliche Maschinenlehre** (2 Stunden). Betrachtung der landwirthschaftlichen Werkzeuge, Geräthe und Maschinen, ihrer Anwendungs- und Wirkungsweise ꝛc. — 39) **Landwirthschaftliche Betriebslehre** (3 Stunden). Betriebslehre im Allgemeinen; Erfordernisse des Betriebes; Einrichtung und Führung der Wirthschaft. Landwirthschaftliche Buchführung. Landwirthschaftliche Taxationskunde. — 40) **Landwirthschaftliche Baukunde** (1 Stunde im Winterhalbjahr). Regeln für die Einrichtung der landwirthschaftlichen Wohngebäude, der Scheunen, Ställe ꝛc. — 41) **Landwirthschaftliche Excursionen** in Begleitung des Lehrers der Landwirthschaft und **Culturversuche** auf dem von der Anstalt erpachteten Feldstück unter der Leitung desselben. Die hierauf zu verwendende Stundenzahl ist nicht fest bestimmt, sondern richtet sich nach dem vorliegenden Bedürfniß, der Witterung ꝛc., und es werden nach Befinden auch die landwirthschaftlichen Lehrstunden selbst zum Theil mit dazu verwendet. — 42) **Landwirthschaftliche Chemie** (4 Stunden). Betrachtung derjenigen Grundstoffe und ihrer Verbindungen, welche für den Landwirth von besonderer Wichtigkeit sind, wobei die zur Landwirthschaft in näherer Beziehung stehenden chemischen Gewerbe, wie Branntweinbrennerei, Bierbrauerei ꝛc., mit abgehandelt werden. Betrachtung des Bodens, der Düngestoffe, der Culturpflanzen ꝛc. vom chemischen Standpunct aus. — Außerdem nehmen die Landwirthe in wöchentlich 2 Stunden, die im Winter nach Befinden auf 4 vermehrt werden, Theil an dem Unterricht Nr. 30, bei welchem sie namentlich im Zeichnen landwirthschaftlicher Geräthe und Maschinen geübt werden; ferner nochmals an dem Unterricht Nr. 17, und, facultativ, an Nr. 18, so wie, im Sommerhalbjahr in 4, im Winterhalbjahr in 8 Stunden, an den praktisch-chemischen Arbeiten (Nr. 34), bei denen sie vorzüglich mit der Untersuchung von Bodenarten, Düngestoffen, landwirthschaftlich wichtigen Pflanzen ꝛc. sich beschäftigen.

Erste Classe.

Für Mechaniker:

43) **Maschinenlehre** (6 Stunden). Ueber Maschinen und Maschinenbau im Allgemeinen; Maschinentheile zum Stützen, zum Fortleiten, Verändern und Reguliren der Bewegung, namentlich mit Rücksicht auf Fabrikationsmaschinen; vom Messen der bewegenden Kräfte und ihrer Wirkungen; Maschinen zur Aufnahme der bewegenden Kraft des Menschen, der Thiere, des Wassers, Dampfes und Windes; die am häufigsten vorkommenden Arbeitsmaschinen; Statik der Baukunst. — 44) **Maschinenzeichnen** (im Sommerhalbjahr 6, im Winterhalbjahr 4 Stunden). Zeichnen von Kraft- und ausübenden Maschinen nach Vorlegeblättern, nach eigenen Aufnahmen; Entwerfen von Maschinen. — 45) **Mathematik** (3 Stunden). Theorie der höheren Gleichungen, analytische Geometrie, mathematische Uebungen. — 46) **Descriptive Geometrie** (3 Stunden, nach Dr. v. Bünau's deutscher Bearbeitung des Lehrbuchs von Lefebure de Fourcy). Dieser Unterricht ist, ebenso wie der Unterricht Nr. 45, für die mechanisch-chemischen Techniker facultativ. — **Technische Chemie** (Nr. 33). An diesem Unterricht betheiligen sich namentlich die mechanisch-chemischen Techniker, sofern sie nicht bereits in Cl. II daran Theil genommen haben, während er für die mechanischen Techniker facultativ ist. — Seitens der mechanisch-chemischen Techniker kann auch eine Betheiligung an dem Unterricht in der **landwirthschaftlichen Chemie** (Nr. 42) stattfinden. — **Praktisch-chemische Arbeiten** (Nr. 34.). An diesem Unterricht nehmen ebenfalls vorzüglich die mechanisch-chemischen Techniker Theil, und zwar durchgehends in 8—12 Stunden wöchentlich. Für die mechanischen Techniker ist die Betheiligung daran facultativ, und im Allgemeinen auf 4 Stunden beschränkt. — Außerdem nehmen die Zöglinge der ersten Classe noch Theil an dem deutschen Sprachunterricht (Nr. 25), bei welchem, um die zweimalige Betheiligung der Schüler an demselben diesen nutzbringend zu machen, in der Literaturgeschichte in dem einen Jahre die ältere, in dem anderen die neuere Zeit ausführlicher behandelt wird; ferner an den Unterrichtsgegenständen Nr. 20, 26 und 32, und facultativ an Nr. 17 und 18.

Außerdem ist allen Zöglingen, welche daran Antheil nehmen wollen, an der Gewerbschule Gelegenheit geboten, sich an folgenden Unterrichtsgegenständen zu betheiligen:

47—50) **Französischer Sprachunterricht.** Derselbe wird in 4 Classen, wöchentlich zu je 3 Stunden, ertheilt; die Zöglinge werden in diejenige Classe aufgenommen, für welche sie sich ihrer Vorbildung nach am Besten eignen. — 51—53) **Englischer Sprachunterricht.** Derselbe wird in 3 Classen, wöchentlich zu je 3 Stunden, ertheilt, in welche die betreffenden Zöglinge ebenfalls nach Maßgabe ihrer Vorbildung eingereiht werden. — 54) **Kaufmännische Buchführung** (2 Stunden). — 55) Specialcursus in **Spinnereimechanik** für Diejenigen, welche sich der Baumwollspinnerei widmen wollen; dieser Unterricht wird, in wöchentlich 4 Stunden, gewöhnlich von 2 zu 2 Jahren während des Winters ertheilt. — 56) Unterricht im **Fabrik- und Musterzeichnen** (wöchentlich 4 Stunden). — 57) **Unterricht im Bossiren** in Thon und Wachs (einen Nachmittag in jeder Woche).

Zur Nachhülfe wird in wöchentlich 3 Stunden 58) ein **Privatunterricht in Geographie und Geschichte** ertheilt, welchem beizuwohnen den nicht genügend vorbereitet eintretenden Zöglingen zur Pflicht gemacht wird.

II. Baugewerkenschule.

Untere Classe.

Arithmetik (6 Stunden) bis zu den Proportionen, Wurzeln und Potenzen, Buchstabenrechnung. — **Geometrie** (4 Stunden, nach Mitterer's Lehrbuch). Ebene Geometrie, Stereometrie, Trigonometrie, mit Einschränkung auf das rechtwinklige Dreieck. — **Allgemeine Baukunst** (6 Stunden). Kurze Encyklopädie der Bauwissenschaften, Lehre von den Zwecken, Theilen, Einrichtungen, Erfordernissen, Fehlern u. s. w. der Gebäude; Baumaterialien und Geräthschaften; Constructionslehre; Baupolizeivorschriften. — **Architektonisches Zeichnen** (6 Stunden). Theils nach Modellen und Vorlegeblättern, theils nach Originalaufnahmen. — **Projectionslehre** (4 Stunden). Aehnlich wie bei der Gewerbschule. — **Freies Hand- oder Ornamentenzeichnen** (4 Stunden). — **Modelliren** (2 bis 4 Stunden). Die vorzüglichsten Arbeiten der Maurer, Steinmetzen und Zimmerleute werden in Thon oder Holz ausgeführt. — **Deutsche Sprache** (3 Stunden, nach Schöne's Leitfaden). — **Repetitionen** in Bauwissenschaft und Mathematik (4 Stunden).

Obere Classe.

Mechanische Naturlehre, mit steter Anwendung auf das Baufach (4 Stunden, nach Koppe's Anfangsgründen der Physik). — **Specielle Maurer- und Zimmerkunst** (je 4 Stunden), mit Berücksichtigung des Wasser-, Brücken- und Straßenbaues. — **Anweisung zur Fertigung von Baurissen und Anschlägen** (4 Stunden). — **Architektonisches Zeichnen** (4 Stunden). Entwerfen von Bauplänen. — **Freies Hand- oder Ornamentenzeichnen** (4 Stunden). — **Perspective** (2 Stunden). — **Modelliren** (2 bis 4 Stunden), wie vorher. — **Bossiren** von Ornamenten ꝛc. in Thon (4 Stunden). — **Deutsche Sprache**, nach Schöne's Leitfaden (2 Stunden). — **Repetitionen** in Bauwissenschaft und mechanischer Naturlehre (4 Stunden).

Lehrer.

An der Gewerbschule.

Prof. Georg Heinrich Eberhard Schnedermann, Dr. phil., Director (für allgemeine und technische Chemie und praktisch-chemische Arbeiten).

Prof. Heinrich von Bünau, Dr. phil. (für descriptive Geometrie, Perspective, Projectionslehre, praktische Geometrie und Planzeichnen).

Prof. Ernst Theodor Stöckhardt (für die verschiedenen Zweige der Landwirthschaftslehre).

Prof. Hermann Friedrich Theodor Ludwig (für Mathematik, Physik und praktische Geometrie).

Carl Reinhold Brückmann (für Maschinenlehre, Maschinenzeichnen, Mechanik und mechanische Technologie).

Christian Heinrich Terne (für freies Handzeichnen und Bossiren).

Victor August Benoit (für französische Sprache).

Friedrich Ernst Conradi (für Bauwissenschaft und architektonisches Zeichnen).

Ernst Moritz Findeisen, Dr. phil. (für kaufmännisches Rechnen und Buchhalten).

August Wilhelm Guthmann (für geometrisches, freies Hand-, Fabrik- und Musterzeichnen).

Heinrich Eduard Lamprecht, Cand. der Theologie (für deutsche Sprache, Geographie und Geschichte).

Adolph Knop (für Physik, Naturgeschichte und Chemie).

Carl August Junge (für Mathematik).

Eduard White (für englische Sprache).

Carl Alexander Müller, Dr. phil. (für die praktisch-chemischen Arbeiten).

An der Baugewerkenschule.

Prof. Georg Heinrich Eberhard Schnedermann, Dr. phil., Director.

Prof. Heinrich von Bünau, Dr. phil. (für Projectionslehre, Perspective und mechanische Naturlehre).

Friedrich Ernst Conradi (für die gesammten Bauwissenschaften, architektonisches Zeichnen und Modelliren).

Christian Heinrich Terne (für freies Hand- und Ornamentenzeichnen und für Bossiren).

Heinrich Eduard Lamprecht, Cand. der Theologie (für deutsche Sprache).

Carl August Junge (für Mathematik).

Verzeichniß der Schüler.

Gewerbschule.

Classe I.

1. Dogny, Johann Amat Woldemar, aus Hirschberg.
2. Seyferth, August Hermann, aus Langensalza.
3. Uhle, Otto Theodor Hermann, aus Klosterbach.
4. Lang, Johann Paul Theodor, aus Leipzig.
5. Ein Stipendiat als Assistent bei den praktisch-chemischen Arbeiten (abgegangen).

Classe II.

1. Fischer, Rudolph Carl, aus Hammer in Böhmen.
2. Köthe, Christian Friedrich Wilhelm, aus Göritzhain (abgeg.).
3. Kühne, Wilhelm Ludwig, aus Colditz.
4. Liebieg, Johann Joseph Moritz, aus Reichenberg.
5. Schlegel, Emil Oscar, aus Auerswalde.
6. Webendörffer, Christian, aus Zeulenroda (abgeg.).
7. Weißwange, Max Emil Hermann, aus Schkeuditz.
8. Lange, Carl, aus Altwarnsdorf (abgeg.).
9. Römer, Abraham Eduard, aus Frankenberg.
10. Martin, Friedrich Moritz, aus Zschopau.

11. von Manteuffel, Ernst Hans, aus Freiberg.
12. von Otto, Moritz Holm, aus Kreckwitz.
13. Siegert, Carl Franz Theodor, aus Oelsnitz.
14. von Welck, Curt Rudolph, aus Zwickau.
15. Winckler, Hermann Alexander, aus Freiberg.
16. Gottschalk, Heinrich, aus Mittweida (blos für Chemie, abgeg.).
17. Käferstein, Eugen Alexander, aus Penig.
18. Pohl, Emil Heinrich Otto, aus Lewin (abgeg.)

Um Ostern 1851 traten ein:

19. Schirmer, Johann Gottfried Leonhard, aus Erfurt.
20. Müller, Ernst Friedrich Wilhelm, aus Lindenberg (blos für engl. Sprache).

Im Laufe des Cursus trat ein:

21. Donner, Heinrich Louis, aus Greiz (blos für Maschinenzeichnen, weggeblieben).

Classe III.

1. von Bernewitz, Friedr. Aug. Richard, aus Zittau.
2. Börner, Julius, aus Chemnitz.
3. Brauer, Carl Ludwig, aus Meerane.
4. Breitfeld, Alexis Ferdinand, aus Unterwiesenthal.
5. Brod, Carl Friedrich, aus Barr.
6. Gäßner, Friedrich Richard, aus Mittweida.
7. Grünler, Bernhard Heinrich Theodor, aus Dohna.
8. Hahn, Carl Hugo, aus Einsiedel.
9. Hann, Carl Ernst, aus Chemnitz (blos für einzelne Unterrichtsgegenstände, abgeg.).
10. Hartig, Carl Ernst, aus Stein bei Wiederau.
11. Hildebrand, Arwed Gustav, aus Gruna.
12. Hübner, Carl Edmund, aus Chemnitz.
13. Ilgen, Friedrich Moritz, aus Grunau.
14. Keller, Georg Hugo, aus Mylau.
15. Kempe, Carl Heinrich Louis, aus Hennersdorf.
16. Klappenbach, Johann Friedrich, aus Hettstedt.
17. Köhler, Carl Joseph, aus Waldheim (abgeg.).
18. Kühne, Franz Emil, aus Görkau.
19. Leitenberger, Carl Alfred, aus Niemes (abgeg.).
20. Lüder, Clemens Otto, aus Mittweida.
21. Metzner, Ferdinand Richard, aus Leipzig.
22. Naundorf, Melchior Noah Herm., aus Würchwitz.
23. Poppig, Otto Ludwig, aus Borna.
24. Reuter, Gustav Bernhard, aus Bockwitz.
25. Rühling, Adolph, aus Spora.
26. Ruoff, Gottlieb Hermann, aus Waldheim.
27. Schiefer, Ernst Eduard, aus Röhrsdorf.
28. Schmidt, Carl Gustav, aus Stollberg.
29. Stein, Eduard Wallmuth, aus Limbach.
30. Straub, Ernst Heinrich, aus Plauc.
31. Wetzel, Gottlob Hugo, aus Oberwiesa.
32. Wiede, Friedrich Gotthelf Anton, aus Böhrigen.
33. Zenker, Max Rudolph, aus Leipzig.
34. Hirth, Carl Wilhelm, aus Falkenau.
35. Delling, Christian Heinrich Eduard, aus Kohren.
36. Knoll, Adolph Anton Johann, aus Carlsbad.
37. Theuerkorn, Gustav Eduard Emil, aus Leipzig.
38. Ketzer, Valentin, aus Chemnitz.
39. Rosenthal, Johann Friedrich Hermann, aus Groß-Jena (abgeg.).
40. Reinhardt, Hermann, aus Zschopau.
41. Knop, Johann Christian Hermann, aus Celle.
42. Neumeister, Ludwig Bernhard, aus Zschopau.
43. Otto, Heinrich Louis, aus Breitingen.
44. Melzer, Eduard Theodor Oscar, aus Chemnitz.

Um Ostern 1851 traten ein:

45. Adler, Georg Bernhard, aus Unterlauterbach.
46. Francke, Franz Heinrich, aus Dresden.
47. Gadegast, Adolph Carl, aus Thal bei Oschatz.
48. Gaitzsch, Carl Moritz, aus Tautendorf.
49. Meischner, Paul Julius, aus Nemse.
50. Müller, Gustav Adolph, aus Görkau (abgeg.).
51. Ruidrich, Rud. Maximilian, aus Langwolmsdorf.
52. Speck, Heinrich Moritz, aus Reichenbach.
53. Träger, Ludwig Moritz, aus Mylau.
54. Böttger, Clemens Leopold, aus Altenberg (blos für Chemie).
55. Röter, Carl Heinrich, aus Löbau, Schulamtscandidat (Zuhörer, blos für Chemie, abgeg.).
56. Oschatz, Ernst Theodor, aus Chemnitz (blos für Chemie).
57. Findeisen, Ernst Moritz, aus Chemnitz (blos für Chemie).
58. Görner, Johann Carl David, aus Bernsdorf (blos für Chemie).

Im Laufe des Cursus traten ein:

59. Gräfe, Carl Heinrich Ernst, aus Waldenburg (blos für prakt. Geometrie, abgeg.)
60. Reichenbach, Carl Gottlob, aus Grumbach (blos für prakt. Geometrie, abgeg.).
61. Nordwall, Adolph Leonhard, aus Linköping in Schweden (blos für Chemie und Physik).
62. Froriep, Otto Ludwig, aus Berlin.
63. Petzoldt, Heinrich Wilhelm, aus Langenleube-Niederhain (blos für Zeichnen).
64. Freude, Hermann Julius, aus Ebersbach (blos für Chemie und engl. Sprache).

Classe IV[a].

1. Meyer, Otto Bernhard, aus Herrnsdorf.
2. Pilz, Conrad Ferdinand, aus Braunsdorf (abgeg.).
3. Vieweg, Clemens Theodor, aus Lichtenstein.
4. Claude, Alexander Emil Ludwig, aus Leipzig.
5. Geißler, August Wilhelm, aus Chemnitz (abgeg.).

Um Ostern 1851 traten ein:

6. Arnold, Ernst Friedrich, aus Glauchau (abgeg.).
7. Beda, Louis Ferdinand Christian, aus Blankenberg.
8. Bernhardt, Hugo Robert, aus Zehdenick.
9. Ehrhardt, Julius Bruno, aus Ober-Rossau.

10. Fikentscher, Georg Florian Hermann, aus Redwitz.
11. Friedrich, Maximilian Otto Richard, aus Lößnitz.
12. Göpel, Ernst Otto, aus Altenburg.
13. Gotsch, Clemens Ivan, aus Mühlau.
14. Günther, Hermann Oscar, aus Hamburg.
15. Hallensleben, Wilhelm Günther Ludwig, aus Sondershausen.
16. Hesse, Otto, von Schindler's Blaufarbenwerk.
17. Hofmann, Johann Alfred Julius, aus Dresden.
18. Höfel, Carl Robert, aus Chemnitz.
19. Klemm, Constanz Bernhard, aus Witschdorf.
20. Meinert, Louis Alfred, aus Siegmar.
21. Müller, Ernst Johannes, aus Döbeln.
22. Oehme, Paul Hermann, aus Grünhainichen.
23. Oehme, Adolph Ferdinand, aus Chemnitz.
24. Philipp, Carl Eduard, aus Hilbersdorf.
25. Pietschmann, Joseph, aus Schönlinde.
26. Neuther, Hermann Friedr. Rob., aus Wolkenstein.
27. Schönberg, Alfred, aus Dresden.
28. Solbrig, Friedrich August, aus Katharinberg.
29. Schwarzenberg, Gustav Adolph, aus Mittweida.
30. Thiergen, Friedrich Wilhelm, aus Döbeln.
31. Uhlig, Oscar Eduard, aus Dornreichenbach.
32. Szábel, Melchior Joseph, aus Klausenburg.
33. Stöckhardt, Carl Robert, aus St. Petersburg.

Im Laufe des Cursus traten ein:

34. Polster, Moritz Friedrich, aus Burgstädt (abgeg.).
35. Mittenzwei, Heinrich Moritz, aus Zwickau.
36. Ebert, Friedrich Wilhelm, aus Thierfeld.
37. Hartl, Heinrich, aus Reichenberg.
38. Eckoldt, Ernst Wilhelm, aus Röhrsdorf.
39. Anke, Friedrich Oscar, aus Chemnitz.
40. Kloß, Emil Wilhelm, aus Chemnitz.
41. Richter, August Friedrich, aus Altgeising.

Classe IV^b.

Um Ostern 1851 traten ein:

1. Auerbach, Johann Gottlob, aus Chemnitz.
2. Bamberger, Ed. Wilh. Louis Ad., aus Frankenfeld.
3. Beier, Hermann Friedrich, aus Börnigen.
4. Breitfeld, Carl Theodor, aus Einsiedel.
5. Bruhm, Heinrich Feodor, aus Gera.
6. Gölsdorf, Louis Adolph, aus Plaue.
7. Goldammer, Ernst Julius, aus Rochlitz.
8. Günther, Gustav Bernhard, aus Groß-Rückerswalde (abgeg.).
9. Haase, Carl Moritz, aus Pegau.
10. Hähle, Carl Gotthold, aus Leipzig.
11. Hermsdorf, Friedrich Leander, aus Zwickau.
12. Hofmann, Ernst Emil Theodor, aus Chemnitz.
13. Igel, Gustav Rudolph, aus Chemnitz.
14. Klippgen, Heinrich, aus Oberschöna.
15. Koch, August Benjamin, aus Lausigk (abgeg.)
16. Krumbiegel, Franz Hermann, aus Marbach.
17. Leonhardt, Friedrich Moritz, aus Haynichen.
18. Löbel, Julius Robert, aus Auerswalde.
19. Naumann, Theodor Wilhelm, aus Kohren.
20. Pester, Hermann Louis, aus Oberfrohna.
21. Popp, Carl Otto, aus Gunnersdorf.
22. Preißler, Johann Richard, aus Marienberg.
23. Priber, Jacob Heinrich Richard, aus Budissin.
24. Schmidt, Franz Ludwig, aus Mylau.
25. Schubert, Wilhelm, aus Chemnitz.
26. Stöckhardt, Paul Robert Gustav, aus Lichtenstein.
27. Tannenbaum, Moritz, aus Scheibenberg.
28. Wagner, Franz Maximilian, aus Delitz.
29. Walther, Carl Clem., aus Schlößchen Porschendorf.
30. Wenzel, Georg Heinrich, aus Penig.
31. Wolf, Gustav Theodor, aus Kindelbrück.
32. Wünsch, Johann Carl August, aus Witschdorf.
33. Schröpel, Carl Eduard, aus Wurzen.

Im Laufe des Cursus traten ein:

34. Kersten, Carl Christian, aus Mühlhausen.
35. Schäfer, Christian Theodor Rudolph, aus Chemnitz.
36. Richter, Friedrich Wilhelm, aus Meerane.
37. Hübsch, Friedrich August, aus Lichtenstein.
38. Rudolph, Ernst Carl Heinrich, aus Altchemnitz.
39. Müller, Robert Arthur Oskar, aus Görkau.
40. Grundmann, Ernst Bernhard, aus Hohenfichte.
41. Grundmann, Friedr. Maximilian, aus Hohenfichte.
42. Hartmann, Richard Johann Wilhelm, aus Chemnitz.

Fabrikzeichnenunterricht.

1. Weihe, Ernst Hermann, aus Chemnitz, Formstecherlehrling (abgeg.).
2. Uhlich, Carl Rob., aus Chemnitz, Formstecherlehrling.
3. Löwel, Franz Jul., aus Chemnitz, Formstecherlehrling.
4. Oppelt, Jul. Wilh., aus Chemnitz, Weberlehrling.
5. Zipper, Carl Albrecht, aus Chemnitz, Formstecherlehrling.

6—47. 42 Gewerbschüler, die dem Fabrikzeichnenunterricht beiwohnten.

Im Laufe des Cursus traten ein:

48. Scheffler, Hermann Theodor, aus Schönau, Formstecherlehrling.
49. Kreß, Friedrich Wilhelm, aus Chemnitz, Formstecherlehrling.

Baugewerkenschule.

Obere Classe.

Repetenten:

1. Neubert, Wilhelm Friedrich, aus Hohenstein, Maurergeselle (abgeg.).
2. Storll, Carl Johann, aus Leisnig, Maurergeselle.
3. Wolf, Carl Heinr. Aug., aus Rochlitz, Maurergeselle.
4. Gräfe, Carl Heinrich Ernst, aus Waldenburg, Zimmergeselle (abgeg.).

5. Steinbach, Friedrich Hermann, aus Rochlitz, Maurergeselle (abgeg.).
6. Rehwagen, Carl Friedrich, aus Eppendorf, Maurergeselle (abgeg.).
7. Wolf, Ed. Herm., aus Oberwiesa, Steinmetzlehrling.
8. Heinichen, Carl Friedr., aus Pegau, Maurergeselle.
9. Lippmann, Heinrich Wilhelm Adolph, aus Mittweida, Maurerlehrling.
10. Neumeister, Carl Moritz, aus Chemnitz, Maurerlehrling.

Aus der untern Classe traten ein:

11. Brunner, Emil Herm., aus Dresden, Maurergeselle.
12. Gräbner, Friedrich, aus Stollberg, Maurerlehrling.
13. Loose, Gottlob Friedr., aus Lößnitz, Zimmergeselle.
14. Bräuer, Carl Christian Gottlob, aus Arnsfeld, Maurergeselle.
15. Fischer, Chr. Friedr., aus Altenburg, Maurergeselle.
16. Hecht, Jul. Herm., aus Kaufungen, Maurergeselle.
17. Kahl, Johann Gottlob, aus Langenleube-Oberhain, Zimmergeselle.
18. Müller, Friedrich Fürchtegott, aus Neukirchen, Maurergeselle.
19. Rudolph, Johann Carl Friedrich, aus Flöha, Steinmetzlehrling.
20. Schubert, Max Otto, aus Alt-Mittweida, Maurerlehrling.
21. Späte, August Rom., aus Ehrenhain, Maurerlehrling.
22. Staudte, Julius, aus Zettweil, Maurerlehrling.
23. Trübenbach, Heinrich Richard, aus Chemnitz, Zimmerlehrling.
24. Uhlig, Friedr. Emil, aus Wolkenstein, Maurerlehrling.
25. Wächtler, Ernst Herm., aus Flöha, Zimmerlehrling.
26. Wenzel, Friedr. Alw., aus Rittersgrün, Zimmergeselle.
27. Wenzel, Louis Ernst, aus Leisnig, Maurergeselle (abgeg.).
28. Winter, Friedrich Leberecht, aus Heyersdorf, Maurergeselle.
29. Löschner, Carl Louis, aus Chemnitz, Maurergeselle (abgeg.).

Untere Classe.

1. Graupner, Paul Gustav, aus Bockau, Zimmerlehrling.
2. Küchler, August Julius Hermann, aus Heidelbach, Zimmergeselle.
3. Otto, Friedrich Wilhelm, aus Niederzwönitz, Zimmerlehrling.
4. Ruscher, Ernst Paulus, aus Olbernhau, Zimmergeselle (abgeg.).
5. Stark, Friedrich Aug., aus Werdau, Zimmergeselle.

Um Michaelis 1851 wurden aufgenommen:

6. Bachstein, Louis Herm., aus Apolda, Zimmergeselle.
7. Baßler, Carl Heinrich, aus Drehbach, Maurerlehrling.
8. Ebert, Christian Friedr., aus Thierfeld, Maurergeselle.
9. Eisemann, Adolph Leberecht, aus Pirna, Maurerlehrling.
10. Fiedler, Ernst Gustav William, aus Altenburg, Maurergeselle.
11. Fischer, Carl Heinr., aus Auerbach, Maurerlehrling.
12. Gottschaldt, Emil Alwin, aus Chemnitz, Maurerlehrling.
13. Heuchler, Franz Herm., aus Freiberg, Maurerlehrling.
14. Heusinger, Ferdinand Robert, aus Schönau, Maurerlehrling.
15. Höppner, Maximilian Richard, aus Oberwiesa, Steinmetzlehrling.
16. John, Carl Friedrich Ernst, aus Börnichen, Maurergeselle.
17. Jungmichel, Christian Ferdinand Louis, aus Schlettau, Maurerlehrling.
18. Jungnickel, Friedrich August, aus Freiberg, Zimmerlehrling.
19. Kluge, Friedr. Aug., aus Ehrenhain, Zimmerlehrling.
20. Koch, Julius Oscar, aus Drehbach, Zimmerlehrling.
21. Meischer, Robert, aus Mittelsayda, Maurergeselle.
22. Pötzsch, Friedrich August, aus Gückelsberg, Steinmetzgeselle.
23. Tenner, Bernh. Wilh., aus Merseburg, Zimmergeselle.
24. Ullmann, Christian Gottlieb, aus Sorgau, Maurergeselle.
25. Weber, Wilhelm Julius, aus Niederrabenstein, Steinmetzlehrling.
26. Weisfloh, Carl Hermann, aus Johann-Georgenstadt, Maurergeselle.
27. Weiswange, Carl Gottlieb, aus Hohburg, Zimmergeselle.
28. Bieler, Carl Gustav Adolph, aus Vierzighufen, Maurerlehrling.
29. Schumann, Heinr. Herm., aus Nossen, Töpfergeselle.

Im Laufe des Cursus wurde aufgenommen:

30. Kleinsang, Christian, aus Bockel, Zimmergeselle.

An dem Unterricht in der Mathematik und der deutschen Sprache nahmen außerdem Theil:

1. Feiler, Carl Anton, aus Mylau.
2. Helbig, Ludwig Adolph, aus Döbeln.
3. Pabst, Ernst Meno, aus Chemnitz.
4. Petzoldt, Friedrich Wilhelm, aus Schneeberg.
5. Uhle, Ernst Albert, aus Mittelbach.
6. Dietrich, Carl Julius, aus Chemnitz (abgeg.).

Ordnung der Prüfung in der Baugewerkenschule.

Donnerstag den 1. April 1852.

Vormittags 8—12 Uhr.

Obere und **Untere Classe.** Deutsche Sprache. Lamprecht.
Obere Classe. Mechanische Naturlehre. Prof. v. Bünau.
Bauwissenschaften. Conradi.

Nachmittags 2—4½ Uhr.

Untere Classe. Mathematik. Junge.
Bauwissenschaften. Conradi.
Austheilen der Censuren und Auszeichnungen.

Ordnung der Prüfung in der Gewerbschule

Freitag den 2. April 1852.

Vormittags 8—12 Uhr.

Classe IV^a. und IV^b. Naturgeschichte. Knop.
Physik. Knop.
Arithmetik. Junge.
Geometrie. Junge.
Deutsche Sprache. Lamprecht.

Nachmittags 2—5 Uhr.

Classe III. Allgemeine Chemie. Prof. Schnedermann.
Physik. Prof. Ludwig.
Arithmetik. Prof. Ludwig.
Deutsche Sprache. Lamprecht.
Classe I. und II. Englische Sprache. White.

Sonnabend den 3. April 1852.

Vormittags 8—12 Uhr.

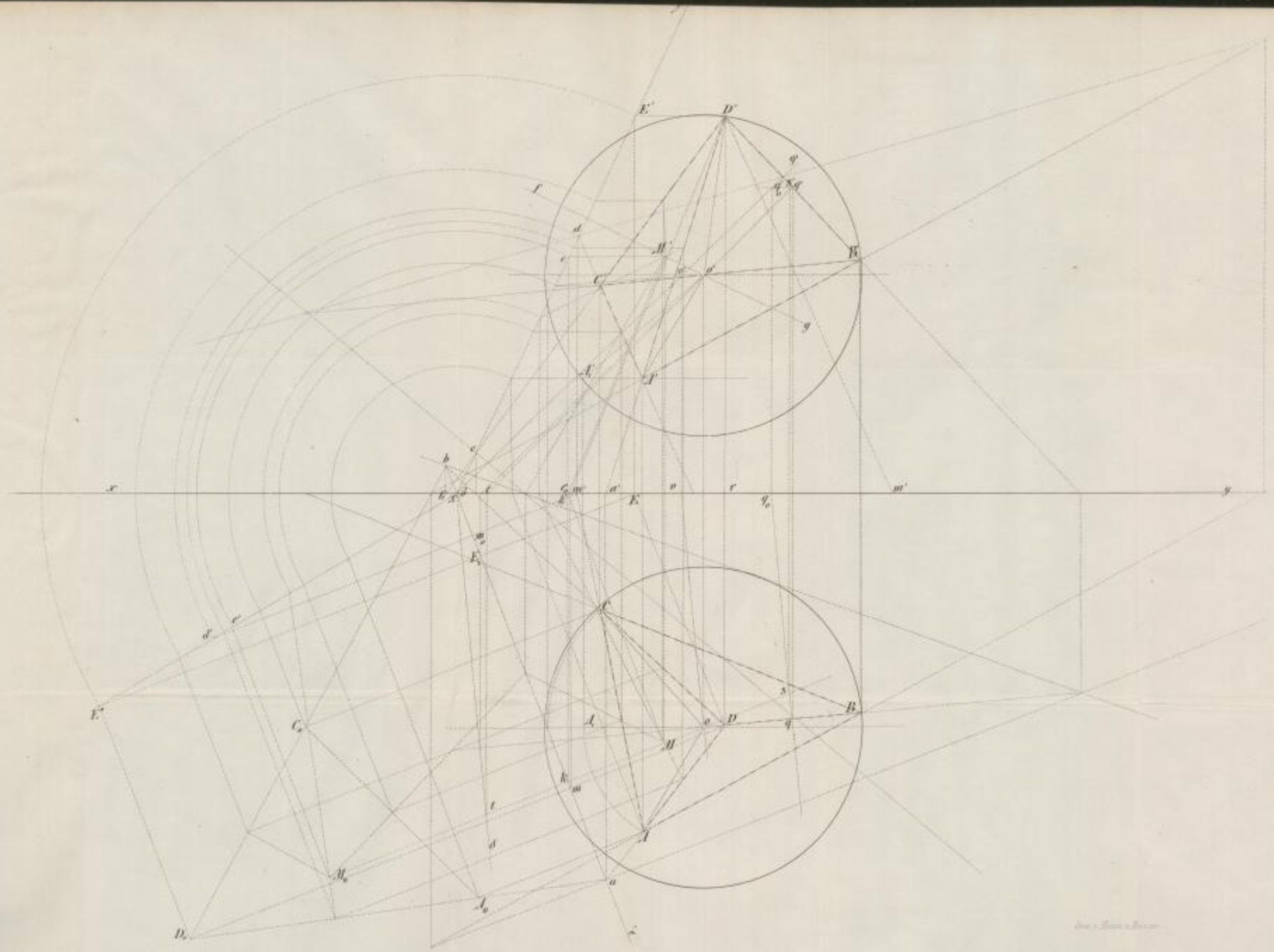
Classe III. Geometrie. Prof. Ludwig.
Classe I. und II. Französische Sprache. Benoit.
Deutsche Sprache. Lamprecht.
Classe I. und Cl. II. M. Mechanik und Maschinenlehre. Brückmann.

Nachmittags 2—5 Uhr.

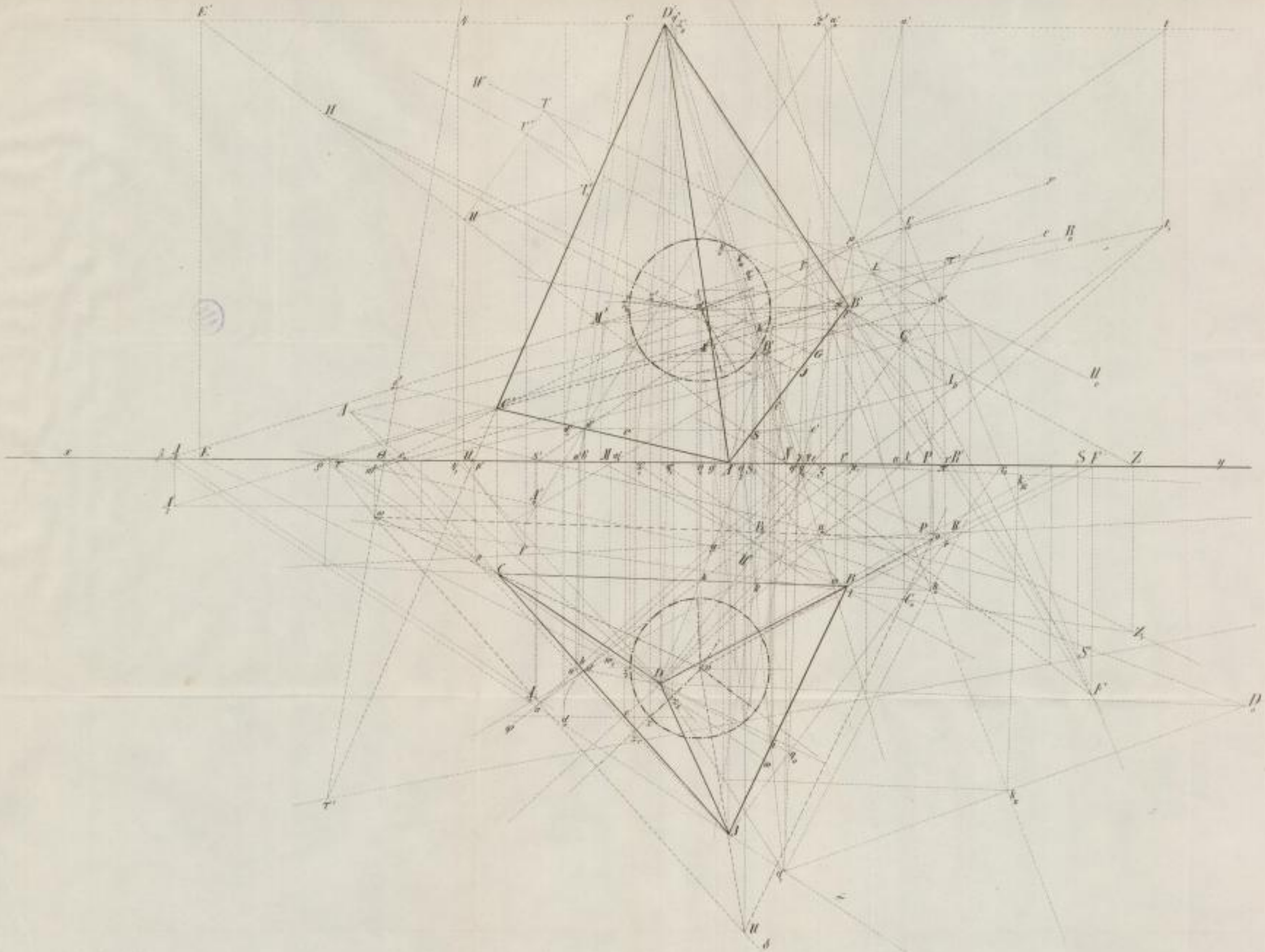
Classe I. und Cl. II. Ch., L. Technische Chemie. Prof. Schnedermann.
Classe II. L. und Cl. III. L. Landwirthschaft. Prof. Stöckhardt.
Austheilen der Censuren und Auszeichnungen.

Zu diesen Prüfungen, wie zur Besichtigung der gleichzeitig ausgestellten Probearbeiten der Zöglinge, ladet die Gönner und Freunde der gewerblichen Bildungsanstalten hierdurch ergebenst ein

Prof. Dr. **G. H. E. Schnedermann,**
Director.



die Gö



3 Falthof.

H. Sax. H. 165 x