PROGRAMM

zu der am 29., 30. und 31. März 1860 zu haltenden

Prüfung der Schüler

der

Königlichen Gewerbschule,

Baugewerkenschule

und

mechanischen Baugewerken- und Werkmeisterschule

zu

Chemnitz.

Leipzig,

Druck von F. A. Brockhaus.

Programm

zu der am **29., 30.** und **31.** März **1860** zu haltenden

Prüfung der Schüler

der

Königlichen Gewerbschule,

Baugewerkenschule

und

mechanischen Baugewerken- und Werkmeisterschule

zu Chemnitz.

Inhalt:

Die Centralprojection als geometrische Wissenschaft,

von

Dr. O. W. Fiedler.

Nachrichten über die drei vereinigten Lehranstalten,

von

Prof. Dr. G. H. E. Schnedermann,

Director.

Leipzig,

Druck von F. A. Brockhaus.

Die Centralprojection als geometrische Wissenschaft.

Einleitung.

Die nachfolgende Abhandlung hat den Zweck, eine kurze, in dem was sie enthält systematische, Darstellung der Methode des perspectivischen Zeichnens oder der Centralprojection als einer geometrischen Wissenschaft zu geben. Es wird in ihr versucht, die Centralprojection vollkommen selbständig zu entwickeln, als eine Methode, durch welche alle Raumformen, sobald sie geometrisch bestimmt sind, sich auch zeichnend wiedergeben und behandeln lassen.

Die ganze Entwickelung hat zu diesem Ende wesentlich von dem abweichen müssen, was in den neueren Schriften über die Perspective, soweit sie mir bekannt sind, als üblich erscheint. In ihnen allen liegt das Gewicht und das Interesse auf der Bedeutung, welche die perspectivische Projection durch ihre Verwandtschaft mit dem Prozess des Sehens für die darstellende Kunst besitzt, und es ist an ihre Ausbildung in dieser Richtung sehr viel Fleiss und bedeutender Scharfsinn gewendet worden. Darin, dass in der folgenden Darstellung aller Nachdruck auf der geometrischen Seite der Sache ruht und jede Beziehung auf den Zweck der Nachahmung der Gesichtseindrücke geflissentlich vermieden ist, mag man die Rechtfertigung für die besondere Behandlung dieses Gegenstandes am gegenwärtigen Orte zu allermeist finden.

Die darstellende Geometrie soll die allgemeinen und vollständigen Methoden überliefern, welche zur graphischen Behandlung der Raumformen dienen; sie soll in dieser Allgemeinheit der Methoden, in dem systematischen Zusammenhang der darin enthaltenen Grundgedanken, in dem Nachweis ihrer Anwendbarkeit auf alle ebenflächigen und krummflächigen Raumformen die Gewähr für ihre allseitige Brauchbarkeit in sich selbst darbieten. Die „Géométrie discriptive", wie sie Monge ausgebildet hat, thut dies und die Perspective muss, als eine geometrische Darstellungsmethode betrachtet, das Nämliche leisten. Alsdann hat sie auch selbständigen und sogar hervorragenden Antheil an der grossen Bedeutung, welche die darstellende Geometrie als die beste Schule der räumlichen Anschauung im Organismus des mathematischen Unterrichts besitzt.

Aber man hat die Perspective zumeist etwa wie einen Anhang zur Parallelprojectionslehre behandelt, hat sich im Wesentlichen darauf beschränkt, Objecte, welche durch Grund- und Aufriss bereits bestimmt sind, in Perspective zu setzen; und ich füge sogleich hinzu, man hat das mit vollem Rechte gethan, insofern man die perspectivische Darstellung als die Grundlage der Malerei und aller decorativen Kunst überhaupt betrachtete. Für die Verwendung zu technischen Zeichnungen ward jedoch eben dadurch die perspectivische Methode ein unnützer Ballast, und die räumliche Anschauung findet dabei eine zu geringe Ausbeute, als dass der methodische Werth hoch angeschlagen werden könnte.

Darum kommt es vor Allem darauf an, die Methode der perspectivischen Darstellung selbständig zu machen, d. h. sie ohne Vermittelung einer Beziehungsweise, die nicht organisch aus ihr selbst oder der Natur der behandelten räumlichen Objecte hervorgeht, auf die geometrischen Grundgebilde und deren Verbindungen anzuwenden; eine solche ist es, wenn man sich an die Bestimmung der räumlichen Objecte durch Punkte und an die Bestimmung der Punkte durch Grundriss und Höhe bindet; oder auch, wenn man im Anschluss an den Vorgang des Sehens die Lage der darzustellenden Punkte auf einen kegelförmig begrenzten Theil des Raumes vor dem Projectionscentrum einschränkt. In der Wissenschaft der geometrischen Darstellung haben diese Beschränkungen keine Stelle, sie treten erst da ein, wo man die Anwendungen derselben zur Nachahmung der Gesichtseindrücke entwickelt. Niemand kann läugnen, dass diese Verbindung mit der Kunst der perspectivischen Darstellungsmethode zu besonderem Vorzuge gereicht.

Es ist nichts Neues, was mit diesen Anforderungen und Unterscheidungen ausgesprochen wird; ich habe zwar weder die Absicht noch die literarischen Hilfsmittel, sie historisch zu verfolgen, aber die folgenden Anführungen genügen zur Bestätigung des Gesagten.

J. H. Lambert gab seinem Werke über die Perspective den Titel: „Die freie Perspective, oder Anweisung, jeden perspectivischen Aufriss von freien Stücken und ohne Grundriss zu verfertigen.“ (Zürich 1759. Zweiter Theil 1774.) Es ist die von der Abhängigkeit vom Grundriss befreite Perspective; Lambert lehrt, wie sowohl die Figuren der Grundebene als auch die auf schiefen Ebenen gelegenen Systeme rein nach ihrer geometrischen Bestimmung ohne Grundriss und Höhe perspectivisch dargestellt werden können. Es soll in einigen Bemerkungen am Schlusse dieser Abhandlung genauer angegeben werden, inwieweit die Methoden dieses ausgezeichneten Buches mit denen zusammenhängen, welche in der folgenden Darstellung zu Grunde gelegt sind.

In M. Chasles' „Geschichte der Geometrie“ in der Uebersetzung von Sohnke (Halle 1839) findet sich auf S. 192 f. eine Bemerkung über ein Werk unter dem Titel: „Géométrie perspective par B. E. Cousinery“ (Paris 1828); in derselben sind die Grundgedanken des französischen Autors durch folgende Worte ausgedrückt: „Eine Ebene, welche irgendwie im Raume liegt, wird in dem Entwurf durch zwei parallele Gerade bestimmt, von denen die eine die Durchschnittslinie dieser Ebene mit der Projectionsebene und die andere die Durchschnittslinie einer zweiten Ebene ist, welche durch das Auge oder den Centralpunkt, von dem die projicirenden Linien ausgehen, parallel mit der ersten Ebene gelegt wurde. Eine Gerade wird auf analoge Art durch zwei Punkte bestimmt, von welchen der eine der ist, in welchem die Gerade die Projectionsebene trifft, und der andere derjenige, in welchem eine zweite Gerade, die durch das Auge parallel mit der ersten gezogen wird, durch die Bildebene geht. Um einen Punkt zu bestimmen, muss man zwei Gerade kennen, auf welchen er zu gleicher Zeit liegt, von denen die eine durch das Auge gehen und sich auf einen Punkt in der Perspective reduciren kann.“

Wenn es für so einfache Entwickelungen einer besondern Grundlage bedarf, so ist diese Anführung die eigentliche Grundlage der folgenden Abhandlung; man wird finden, dass die in derselben angewendeten Methoden mit Leichtigkeit aus den darin enthaltenen Grundgedanken hervorgehen. Ich habe sie in dem von mir vorgetragenen Cursus der darstellenden Geometrie an der Königlichen Gewerbschule gelehrt, ehe ich M. Cousinery's Werk selbst erlangen konnte. Nun zeigt mir der Vergleich mit seiner Darstellung freilich eine grosse und doch nicht ganz unerwartete Gemeinschaft auch im Verfolge der Entwickelung; wenn aber schon der Umstand die folgende Abhandlung an diesem Orte rechtfertigen würde, dass seit mehr als dreissig Jahren diese Methoden kein grösseres Gewicht in der Wissenschaft der darstellenden Geometrie erlangt haben, als man ihnen heute beilegt, so wird doch auch, wie ich hoffe, der sachkundige Leser bei der Vergleichung in der systematischen Anordnung und den entwickelten Methoden vieles Eigenthümliche finden.

Jene Grundsätze über die Darstellung der geraden Linie, der Ebene, des Punktes sind übrigens nur die natürlichen Erweiterungen der Darstellungsweise, welche man von jeher schon für die geraden Linien und Punkte der Grundebene und für diese selbst angewendet hat. Sie sind auch keinem Geometer unbekannt, denn seit M. Poncelet's „Traité des propriétés projectives des figures“ (1822) sind sie überall da vorausgesetzt worden, wo man die Perspective als geometrische Beweismethode angewendet hat. Auch auf diesen Punkt komme ich in den Schlussbemerkungen zurück.

Grundbegriffe.

1. Jede Projectionsmethode hat den nächsten und wesentlichsten Zweck, durch Elemente in einer Fläche räumliche Gestalten zu bestimmen und setzt dazu eine Verbindung zwischen den Punkten dieser letzteren und denen der ersteren oder der Bildfläche fest, welche durch projicirende Linien gesetzmässig vermittelt wird. Es liegt in der Natur der Sache, dass die Bildfläche allermeist eine Ebene ist und dass die projicirenden Linien als gerade Linien gedacht werden. Die gesetzliche Beziehung, durch welche diese letzteren die Punkte der Bildfläche mit den entsprechenden Punkten des darzustellenden Objects verbinden, kann von verschiedener Art sein, aber die einfachste von allen ist die der Centralprojection, d. i. diejenige, bei welcher alle diese projicirenden Linien von einem gemeinschaftlichen Centrum aus gezogen sind. Sie bilden in diesem Falle eine projicirende Kegelfläche — man hat deshalb diese Projectionsmethode wohl auch die conische genannt — und die Durchschnittslinie derselben mit der Bildebene ist die Projection der vorgelegten Raumgestalt. Wird das Projectionscentrum in unendlicher Entfernung gedacht, so haben alle projicirenden Linien die nämliche Richtung und bilden eine Cylinderfläche, deren Durchschnittslinie mit der Bildebene die Projection der vorgelegten Raumgestalt ist. Daraus entspringt die cylindrische oder Parallelprojection und sie kann nach der schiefen oder rechtwinklichen Lage der projicirenden Linien gegen die Bildebene als eine schiefe oder als eine rechtwinkliche bezeichnet werden.

Wenn durch eine solche Projection, d. h. durch die in der ebenen Bildfläche enthaltenen graphischen Elemente eine Raumgestalt bestimmt werden soll, so muss durch dieselben zu den Schnittpunkten der projicirenden Linien mit der Bildebene, als welche zunächst darin enthalten sind, auch der jedesmalige Verlauf der projicirenden Linien selbst von diesen Punkten aus und die Lage der durch sie projicirten Punkte der originalen Raumgestalt in ihnen angegeben sein. Dazu ist bei der Centralprojection die Bestimmung des Projectionscentrums selbst, bei der Parallelprojection die Bestimmung der Richtung der projicirenden Linien — oder der Lage ihres unendlich entfernten Durchschnittspunkts — nöthig. Diese Bestimmung erfolgt dort durch die Angabe des Punktes, in welchem ein vom Projectionscentrum auf die Bildebene gefälltes Perpendikel dieselbe trifft und durch Abtragen der Länge dieses Letztern von demselben aus. Wir werden jenen Punkt den Hauptpunkt und diese Länge die Distanz nennen und sie auftragen, indem wir mit ihr auf der Bildebene um den Hauptpunkt einen Kreis beschreiben, der darnach als Distanzkreis bezeichnet werden darf. Bei der Parallelprojection geschieht sie durch die Combination dreier Projectionsebenen, die sich in einem Punkte schneiden und deren Durchschnittslinien die Richtungen der drei entsprechenden Systeme projicirender Linien bezeichnen; man zeichnet in derselben drei Projectionen in geometrischem Zusammenhang und auf dieselbe Tafel, indem man die Voraussetzung einführt, dass nach der Entstehung der Projectionen eines Raumgebildes, bei welcher doch zunächst nur eine derselben in der Tafelebene selbst gebildet werden kann, die beiden andern durch Drehung ihrer Ebenen um ihre Durchschnittslinien mit der Ebene dieser ersten bis zum Zusammenfallen mit ihr auch in die Tafelebene übergeführt worden seien.

So hat die Voraussetzung eines unendlich weit entfernten Projectionscentrums schon in den Grundsätzen der ganzen Methode die eingreifendsten Umwandlungen zur Folge und man kann nicht sagen, dass die Methode der Parallelprojection als ein specieller Fall aus der centralen Projectionsmethode abzuleiten sei; solches würde nur für eine einzelne Parallelprojection wahr sein, ohne jedoch zu irgend einem Ergebniss zu führen, weil die Annahme eines von der Bildebene unendlich entfernten Projectionscentrums keine Bestimmtheit im Sinne der geometrischen Construction besitzt. Und es ist eben das der Grundcharakter der descriptiven Geometrie des Monge, dass drei gleichzeitige Projectionen zur Erreichung ihres Zweckes verbunden werden.

Wenn aber auch eine Uebereinstimmung in dieser Art — kurz gesagt eine Unterordnung der Parallelprojection unter die centrale — nicht zu erwarten ist, so muss in anderem Betracht die Uebereinstimmung zwischen beiden Gebieten der darstellenden Geometrie noch immer gross genug sein, denn sie ist in der Gleichheit des Zweckes und in der Identität der in beiden behandelten Objecte ebenso wie in der der Behandlungsmittel begründet.

In diesem ihren gegenseitigen Verhältniss ist eine Abhängigkeit der beiden Darstellungsmethoden von einander nirgends gesetzt, also z. B. ein Vorangehen der Entwickelung der einen oder der andern in keiner Weise bedingt, und es soll demgemäss auch hier die gedrängte Darstellung der centralen Projectionsmethode ohne jede Beziehung solcher Art auf die Methode der Parallelprojectionen gegeben werden. Weil aber die Vergleichung lehrreich ist, so komme ich am Schlusse in aller Kürze auf dieselbe zurück.

Erster Abschnitt.
Von den ebenflächigen Raumformen.

A. Von der Darstellung der geometrischen Grundgebilde und ihrer Anwendung zur Auflösung von Aufgaben.

2. Die Darstellung der geraden Linie. Wenn alle Punkte einer geraden Linie mit dem Projectionscentrum durch gerade Linien verbunden werden, so geht aus ihnen die projicirende Ebene dieser geraden Linie hervor; sie ist wesentlich unbegrenzt, wenn die gerade Linie so gedacht wurde. Ihre Durchschnittslinie mit der Bildebene muss die Projection dieser geraden Linie sein. Aber dieselbe ist zugleich die Projection aller möglichen geraden und krummen Linien, die in der projicirenden Ebene gezogen werden können, denn jeder ihrer Punkte ist in völlig gleicher Weise das Bild aller der Punkte, welche auf der nach ihm gehenden projicirenden Linie liegen. Die eine gerade Linie, welche durch sie wirklich dargestellt werden soll, ist von den andern geraden Linien der projicirenden Ebene, welche sie alle auch darstellen kann, durch zweierlei unterschieden: zuerst durch den Punkt, in welchem sie die Bildebene trifft, und alsdann durch die Lage ihres unendlich entfernten Punktes oder, nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauch, ihre Richtung; und dadurch ist sie vollständig individualisirt. Beide Punkte sind in der Projection leicht angebbar; für jenen fällt die Projection mit ihm selbst zusammen, für diesen wird sie gefunden, indem man vom Projectionscentrum aus eine Parallele zur darzustellenden geraden Linie zieht und ihren Durchschnittspunkt mit der Bildebene angiebt. Wir nennen jenen Punkt, den die gerade Linie mit der Bildebene gemein hat, ihren Durchgangspunkt und diesen, der die Projection ihres unendlich entfernten Punktes ist, ihren Fluchtpunkt. Die Angabe ihrer Projection und die Festsetzung ihres Durchgangs- und Fluchtpunktes in derselben bestimmen eine gerade Linie.

3. Discussion derselben. Der Durchgangs- und Fluchtpunkt einer geraden Linie sind nicht die Grenzen ihrer Projection, auch die jenseits beider Punkte gelegenen Strecken der Projection bilden Strecken der geraden Linie ab. Die klare Vorstellung des geometrischen Zusammenhanges ergiebt sofort, dass die Strecke des Bildes zwischen Durchgangs- und Fluchtpunkt die unbegrenzte Ausdehnung der gegebenen geraden Linie von der Bildebene ab auf der dem Projectionscentrum entgegengesetzten Seite darstellt; dass die unbegrenzte Strecke jenseits des Durchgangspunktes das Stück der geraden Linie abbildet, welches zwischen der Bildebene und einer zu ihr parallel durch das Centrum gelegten Ebene enthalten ist — denn alle Punkte dieser Ebene haben ihre Projectionen in unendlich entfernten Punkten der Bildebene — und dass endlich die unbegrenzte Strecke des Bildes jenseits des Fluchtpunktes die unbegrenzte Ausdehnung der gegebenen Geraden darstellt, welche von dieser letzteren Ebene ab auf der der Bildebene entgegengesetzten Seite liegt. Diese Angabe ist noch einer nützlichen Vervollständigung fähig. Vergegenwärtigt man sich das Projectionscentrum C, eine gegebene gerade Linie und ihre durch Durchgangspunkt d und Fluchtpunkt f bestimmte Projection, so erhält man ein Parallelogramm $Cdpf$, wenn man durch f eine Parallele zu Cd bis zum Durchschnittspunkt mit der geraden Linie zieht; in demselben gehört die Diagonale df der Bildebene an, die nicht in ihr enthaltenen Gegenecken liegen somit gleichviel vor und hinter der Bildebene, und die ihnen entsprechende Diagonale Cp bestimmt in dem Mittelpunkte m der ersteren die Projection des Punktes p. Für jede gerade Linie ist also der Mittelpunkt m der Strecke df zwischen Durchgangs- und Fluchtpunkt das Bild desjenigen ihrer Punkte p, welcher ebenso weit hinter der Bildebene liegt, wie das Projectionscentrum vor der Bildebene. Dies führt eine zweite der Bildebene parallele Ebene in die Betrachtung ein, welche ebenso weit hinter dieser liegt als die erste vor ihr; wir wollen sie als die Parallelebene von jener als der Gegen-

ebene unterscheiden. Auf einer geraden Linie im Raum werden durch diese drei Ebenen drei Punkte p, d, g bestimmt und so die Strecken ∞p, pd, dg, $g\infty$ in ihr unterschieden; die Projectionen derselben sind bezeichnet durch die entsprechenden Strecken des Bildes fm, md, $d\infty$, ∞f.*)

4. Folgerungen. Ist die gerade Linie eine projicirende Gerade, so fallen Durchgangspunkt und Fluchtpunkt derselben in einen Punkt zusammen und ihre Projection ist dieser Punkt selbst. Wenn, wie wir vorausgesetzt, die Lage des Projectionscentrums C durch Angabe des Hauptpunktes c und des aus ihm beschriebenen Distanzkreises bestimmt ist, so ergiebt sich aus dem Fluchtpunkt f und dem Durchgangspunkt d die projicirte gerade Linie selbst sehr einfach: Sie ist eine durch d zu Cf gezogene Parallele.

Darnach stellt sich ein Büschel von geraden Linien, welches seinen Scheitel in der Bildebene hat, als eine Schaar gerader Linien dar, für welche d der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt ist und ein Bündel paralleler Geraden ist in einer Schaar gerader Linien projicirt, deren gemeinschaftlicher Durchschnittspunkt der Fluchtpunkt f ist.

Gerade Linien, deren Fluchtpunkt der Hauptpunkt ist, sind Normalen zur Bildebene; solche, deren Fluchtpunkt auf dem Distanzkreis liegt, sind unter dem Winkel von 45^0 gegen die Bildebene geneigt. Wenn der Fluchtpunkt einer geraden Linie innerhalb des Distanzkreises liegt, so bildet sie mit der Bildebene einen Winkel zwischen 45 und 90^0, dessen Grösse der einen oder andern Grenze um so näher kommt, je näher der Fluchtpunkt dem Distanzkreis oder dem Hauptpunkt liegt. Punkte ausserhalb des Distanzkreises sind Fluchtpunkte gerader Linien, die mit der Bildebene kleinere Winkel als 45^0 einschliessen. Gerade Linien von gleicher Neigung gegen die Bildebene haben ihre Fluchtpunkte auf demselben vom Hauptpunkte aus beschriebenen Kreise; jedem dieser Kreise entspricht ein bestimmter Neigungswinkel, den man erhält, indem man aus seinem Halbmesser und dem Halbmesser des Distanzkreises als Katheten ein rechtwinkliches Dreieck construirt: er liegt der zweitgenannten Kathete gegenüber. In diesem Sinne wird jeder solche Kreis ein Neigungskreis genannt und man erkennt, dass durch jeden derselben die Lage des Projectionscentrums völlig bestimmt ist, sobald man den entsprechenden Winkel angiebt.

5. Darstellung des Punktes. Die Darstellung eines Punktes ist in dem Vorigen bereits enthalten, denn sie erfolgt durch die Bestimmung einer geraden Linie, auf der er liegt und die Angabe seines Bildes, d. h. die Bestimmung des projicirenden Strahls, der nach ihm hingeht. Der Punkt wird somit als Durchschnitt zweier geraden Linien bestimmt, deren eine seine projicirende Linie ist. Die Lage seines Bildes in den vier im Art. 2 bezeichneten Strecken der Projection der geraden Linie und gegen die Endpunkte derselben bezeichnet seine Lage im Raume gegen das System der drei parallelen Ebenen, welche eben dort bezeichnet sind. Unter allen Lagen, die er in derselben einnehmen kann, heben wir nochmals die in der Mitte zwischen Durchgangspunkt und Fluchtpunkt hervor, um zu bemerken, dass hinsichtlich derselben die Vertauschung dieser beiden Punkte als zulässig erscheint. Die genauere Prüfung zeigt, dass zwei gerade Linien, für welche der Fluchtpunkt der einen der Durchgangspunkt der andern ist und umgekehrt, die Seiten pf und pd eines Parallelogramms sind, wie es in Art. 3 betrachtet wurde. Zwei solche gerade Linien schneiden sich demnach in der Parallelebene und der Mittelpunkt m der Strecke df oder $f_1 d_1$ ist das Bild ihres Schnittpunktes.

Weil hier zwei sich schneidende gerade Linien dargestellt sind, so muss in dieser Betrachtung bereits ein Fall von der Darstellung der Ebene enthalten sein, nämlich der specielle, in welchem dieselbe eine projicirende Ebene ist.

6. Die Darstellung der Ebene und deren Discussion. Wir vollziehen die Darstellung der Ebene durch die Bestimmung aller der geraden Linien, welche auf ihr gezogen werden können. Ihre sämmtlichen Durchgangspunkte liegen in einer geraden Linie, nämlich in der Durchschnittslinie der Ebene mit der Bildebene, welche von jetzt an die Spur der Ebene heissen soll; ihre Fluchtpunkte müssen in einer zweiten

*) Ist D die Distanz und sind d und f die Entfernungen eines Bildpunktes in einer Geraden vom Durchgangs- und vom Fluchtpunkte, so ist der Abstand des Punktes selbst von der Bildebene $= \frac{d}{f} D$.

zu jener parallelen geraden Linie liegen, welche die Spur einer Ebene ist, die durch das Projectionscentrum zur gegebenen Ebene parallel gelegt ist; denn eine solche Ebene bilden alle die Parallelen, welche man zu den in der Ebene möglichen geraden Linien durch das Projectionscentrum ziehen kann. Diese Spur der durch das Centrum gelegten parallelen Ebene, welche die Fluchtpunkte aller geraden Linien in unserer Ebene enthält, wird im Folgenden die Fluchtlinie der Ebene genannt. Die Fluchtpunkte aller geraden Linien, welche einer Ebene parallel gezogen werden können, liegen demnach in der Fluchtlinie derselben. Jede Ebene ist durch Spur und Fluchtlinie bestimmt; man erhält sie aus denselben, indem man zu der durch das Projectionscentrum und die Fluchtlinie bestimmten Ebene durch die Spur eine parallele Ebene legt.

Aber die Projection der Ebene ist durch die Fluchtlinie und die Spur nicht begrenzt; vielmehr kann jeder Punkt der Bildebene Projection eines Punktes jeder beliebigen Ebene sein, sobald dieselbe nicht durch das Centrum geht. Für eine solche Ebene fallen Fluchtlinie und Spur zusammen. Jede gerade Linie, deren Durchgangspunkt in der Spur und deren Fluchtpunkt in der Fluchtlinie einer Ebene angenommen wird, gehört dieser Ebene an. Dadurch übertragen sich die Ergebnisse des Art. 3 auf die Darstellung der Ebene wie folgt: Die Spur, die Fluchtlinie und die Mittellinie zwischen beiden theilen die ganze Bildebene in vier unbegrenzte Parallelstreifen; von diesen bildet der unendlich breite Streifen diesseits der Spur den Theil der Ebene ab, welcher zwischen der Bildebene und der Gegenebene liegt, der Streifen von der Spur bis zu jener Mittellinie den zwischen Bildebene und Parallelebene enthaltenen Streifen der Ebene; ferner ist der Streifen von der Mittellinie bis zur Fluchtlinie das Bild desjenigen Theils der Ebene, welcher sich von der Parallelebene bis in das Unendliche auf der dem Centrum entgegengesetzten Seite der Bildebene erstreckt und der noch übrige Theil der Bildebene jenseits der Fluchtlinie das Bild desjenigen Theils der Ebene, der sich vom Unendlichen diesseits der Bildebene bis zur Gegenebene ausdehnt.

Wenn das Bild eines Punktes und eine Ebene gegeben ist, in welcher er liegt, so folgt aus der Lage seines Bildes in den hier bezeichneten verschiedenen Theilen der Bildebene seine Lage in dem einen oder andern der genannten Räume. *)

Denkt man zwei Ebenen, deren eine die Fluchtlinie der andern zur Spur und die Spur der andern zur Fluchtlinie hat, so bilden dieselben mit den durch das Centrum parallel zu ihnen gelegten Ebenen den Mantel eines Parallelepipeds, von welchem zwei gegenüberliegende Kanten der Bildebene angehören, indess die dritte durch das Centrum der Bildebene parallel geht; in Folge dessen liegt die vierte Kante ebenso weit hinter der Bildebene wie das Centrum vor derselben parallel zu ihr, d. h. in der Parallelebene und projicirt sich als Mittellinie zwischen jenen beiden die Spur und die Fluchtlinie darstellenden Kanten. Zwei Ebenen dieser Art schneiden sich also stets in einer der Parallelebene angehörenden Geraden.

7. Folgerungen. Parallele Ebenen haben eine gemeinschaftliche Fluchtlinie und parallele Spuren. Aus der Lage der Fluchtlinie bestimmt sich der Flächenwinkel, den die dargestellte Ebene mit der Bildebene einschliesst: In einem rechtwinklichen Dreieck, dessen Katheten die Distanz und die Entfernung der gegebenen Fluchtlinie vom Hauptpunkt sind, liegt er der erstern Kathete gegenüber. Er ist demnach 45°, wenn die Fluchtlinie den Distanzkreis berührt, grösser wenn sie ihn schneidet, kleiner wenn sie ihn nicht trifft. Die Fluchtlinien aller zur Bildebene senkrechten Ebenen gehen durch den Hauptpunkt. Alle Ebenen von derselben Neigung gegen die Bildebene haben Fluchtlinien, welche vom Hauptpunkt gleich weit entfernt sind, so dass dieselben einen Kreis umhüllen, den man wie im Art. 4 einen Neigungskreis nennen kann.

Diese Ergebnisse erlauben eine Verbindung mit den entsprechenden des Art. 4 und führen dann zur Bestimmung der zwei geraden Linien, die man auf jeder Ebene von einem Punkte aus unter einem vorgeschriebenen Winkel gegen die Bildebene ziehen kann, so lange dieser Winkel dem Neigungswinkel selbst weder gleich ist — dann giebt es nur eine, die Falllinie der Ebene — noch ihn übertrifft; und der zwei Ebenen, die man durch jede gerade Linie unter vorgeschriebenem Neigungswinkel gegen die Bildebene legen

*) Die Formel $e = \frac{d}{f} D$ giebt seinen Abstand von der Bildebene, wenn wie vorher D die Distanz und d und f die Entfernungen seines Bildes von der Spur und der Fluchtlinie der Ebene bezeichnen.

kann, so lange dieser Winkel grösser ist als der Winkel, den die gerade Linie selbst mit der Bildebene macht. In jenem Falle bestimmen sich die Fluchtpunkte der entsprechenden geraden Linien durch den Durchschnitt des Neigungskreises, welcher dem gegebenen Winkel entspricht, mit der Fluchtlinie, in diesem Falle die Fluchtlinien der entsprechenden Ebenen als die Tangenten dieses Neigungskreises, welche vom Fluchtpunkt der gegebenen Linie aus gezogen werden können.

Auf jeder Ebene kann durch jeden Punkt in ihr eine der Bildebene parallele Linie gezogen werden, die Streichlinie der Ebene; ihr Bild ist der Spur und der Fluchtlinie parallel, denn ihr Fluchtpunkt und ihr Durchgangspunkt liegen in unendlicher Entfernung. Den Fluchtpunkt der schon vorher erwähnten Falllinie, welcher der Fusspunkt der vom Hauptpunkt auf die Fluchtlinie der Ebene gefällten Senkrechten ist, wollen wir als den Hauptfluchtpunkt der Ebene bezeichnen.

Durch jede gerade Linie kann man eine zur Bildebene senkrechte Ebene legen: ihre Fluchtlinie verbindet den Fluchtpunkt der geraden Linie mit dem Hauptpunkt; ebenso durch jede gerade Linie eine Ebene, welche mit der Bildebene denselben Winkel macht, wie die gerade Linie selbst: ihre Fluchtlinie ist die Senkrechte, die man im Fluchtpunkt der Geraden auf der Verbindungslinie desselben mit dem Hauptpunkt errichten kann.

8. Besondere Fälle. Den vorher entwickelten Bestimmungsmethoden entziehen sich diejenigen geraden Linien und diejenigen Ebenen, welche der Bildebene parallel sind, denn sie haben nicht Flucht- und Durchgangspunkt, nicht Fluchtlinie und Spur. Aber eine solche gerade Linie kann bestimmt werden durch ihre Projection und einen ihrer Punkte, oder allgemeiner durch eine Ebene, der sie angehört, und einen Punkt, durch den sie geht. Eine Ebene in dieser Lage bestimmt sich durch die Angabe eines Punktes in ihr. Es ist nicht schwer, mit diesen Bestimmungsstücken in den bezüglichen Aufgaben zu operiren. Ein noch speciellerer Fall ist die Bestimmung einer in der Gegenebene gelegenen geraden Linie, weil die ganze Projection derselben in unendlicher Entfernung liegt; und es kommt für diese Ebene noch die Bestimmung eines in ihr enthaltenen Punktes hinzu, welche auch aus der gewöhnlichen herauszutreten scheint, weil sein Bild in unendlicher Entfernung liegt. Aber die Bestimmung einer solchen geraden Linie wird vollzogen durch die Angabe einer Ebene, in welcher sie liegt, und deren Durchschnittslinie mit der Gegenebene sie somit ist. Ebenso wird ein Punkt der Gegenebene durch die Darstellung einer geraden Linie bestimmt, welche ihn enthält und man operirt mit ihm, indem man ihn als durch den unendlich entfernten Punkt ihres Bildes dargestellt betrachtet.

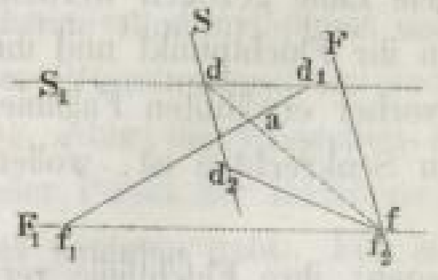
Wenn zwei gerade Linien sich schneiden, so müssen ihre Durchgangspunkte der Spur und ihre Fluchtpunkte der Fluchtlinie derselben Ebene angehören und demnach zwei parallele Linien bestimmen. Je nach der Lage, welche das Bild ihres Schnittpunktes gegen die Grenzpunkte der einzelnen früher (Art. 3) besprochenen Strecken im Bilde der Geraden hat, bestimmt sich seine Lage im Raum. Fällt sein Bild z. B. mit dem Fluchtpunkt, dem Mittelpunkt der Strecke zwischen Flucht- und Durchgangspunkt oder mit diesem letztern selbst zusammen, so liegt der wirkliche Durchschnittspunkt entweder in unendlicher Entfernung oder in der Parallelebene, oder in der Bildebene, und wenn die Projectionen der beiden sich schneidenden geraden Linien parallel sind, so ist ihr Durchschnittspunkt in der Gegenebene enthalten. Das giebt eine andere Form für die Bestimmung von Punkten der Gegenebene. Die Betrachtung vom Durchschnitt zweier Ebenen führt zu einer ganz analogen für die Bestimmung von geraden Linien der Gegenebene.

9. Aufgaben über die gegenseitigen Beziehungen der drei geometrischen Grundgebilde. In dem Vorigen sind die Principien der Centralprojection vollständig enthalten. Es bleibt übrig, zu zeigen, dass und wie dieselben zur Behandlung der im System der darstellenden Geometrie auftretenden Aufgaben genügen. Nur die wesentlichsten und unentbehrlichsten können in die folgende Darlegung aufgenommen werden und kurze Andeutungen über die Art ihrer Behandlung mögen in derselben nach der vorausgegangenen ausführlichen Discussion ausreichen. Es ist nützlich, bei jeder dieser Aufgaben die speciellen Fälle durchzugehen, auch da, wo dies im Folgenden nicht durch besondere Bemerkungen erinnert worden ist.*)

*) Gerade die speciellen Fälle sind zumeist von besonders fördernder Wirkung für das Vermögen der räumlichen Auffassung.

Ueberall, wo in den folgenden Aufgaben keine besonderen Voraussetzungen über die Lage der in ihnen auf einander bezogenen Gebilde gemacht sind, ist von der Festsetzung des Distanzkreises abgesehen worden, und es kann derselbe in allen den beigegebenen Zeichnungen in jeder beliebigen Art eingetragen werden; dadurch sind sie der gleichmässige Ausdruck vieler speciellen Fälle.

Fig. 1.



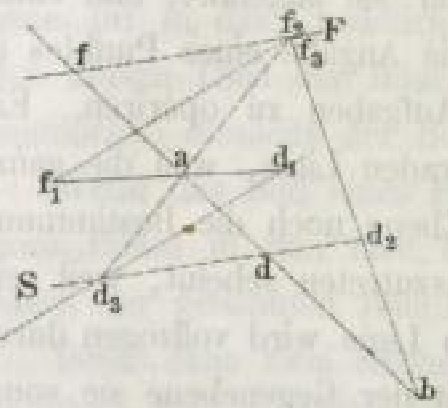
Aufgabe I. (Fig. 1.) Man soll durch einen Punkt zu einer geraden Linie eine Parallele ziehen.

Der gegebene Punkt a liegt in der geraden Linie, deren Durchgangs- und Fluchtpunkt d_1 und f_1 sind, und die gegebene gerade Linie hat den Fluchtpunkt f_2 und den Durchgangspunkt d_2, die gesuchte gerade Linie muss mit d_2f_2 denselben Fluchtpunkt haben und mit d_1f_1 in derselben Ebene liegen, die Parallele dd_1 zu f_1f_2 bestimmt daher ihren Durchgangspunkt d.

Aufgabe II. (Fig. 1.) Man soll durch einen Punkt und eine gerade Linie eine Ebene legen.

Der Punkt a liegt in der Linie d_1f_1 und die gerade Linie ist d_2f_2. Man zieht durch a eine Parallele df zu d_2f_2 (I.) und erhält in der geraden Linie d_2d die Spur und in der durch f_2f zu ihr gezogenen Parallelen die Fluchtlinie der Ebene.

Fig. 2.



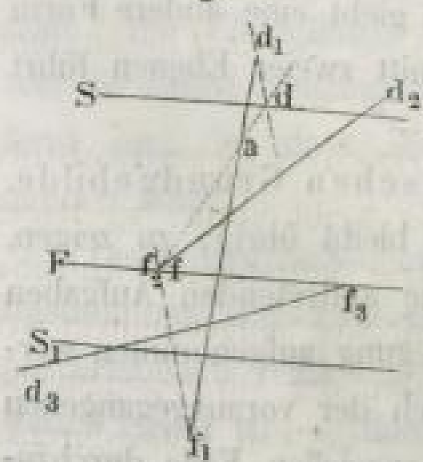
Aufgabe III. (Fig. 2.) Man soll die gerade Verbindungslinie zweier Punkte bestimmen.

Die Punkte a und b sind auf den geraden Linien d_1f_1, d_2f_2 gelegen. Man bestimmt die Ebene (FS), welche die eine dieser beiden Geraden und die verlangte Verbindungslinie enthält (II.), indem man durch einen der beiden Punkte a zu der geraden Linie des andern, d_2f_2, eine Parallele d_3f_3 zieht und erhält in den Durchschnittspunkten der Verbindungslinie mit der Spur und der Fluchtlinie dieser Ebene den Durchgangspunkt d und den Fluchtpunkt f derselben.

Aufgabe IV. (Fig. 1.) Man soll durch eine gerade Linie eine Ebene legen, die einer andern geraden Linie parallel ist.

Sei d_1f_1 die erste, d_2f_2 die zweite gerade Linie, so zieht man durch einen Punkt a der ersten eine Parallele zur zweiten (I.) und verbindet ihren Flucht- und Durchgangspunkt mit dem Flucht- und resp. Durchgangspunkt der ersten. Diese Operation reducirt sich aber einfach darauf, dass man die Fluchtpunkte beider Geraden verbindet, und durch den Durchgangspunkt der ersten eine Parallele zu dieser Verbindungslinie zieht, um die Fluchtlinie F und die Spur S der verlangten Ebene zu erhalten. Man darf nämlich zu dem willkürlich gewählten Punkt den Fluchtpunkt der ersten Geraden nehmen. Die Aufgabe kann auch als ein specieller Fall der Aufgabe II betrachtet werden.

Fig. 3.



Aufgabe V. (Fig. 3.) Man soll durch einen Punkt eine Ebene legen, welche zwei geraden Linien parallel ist.

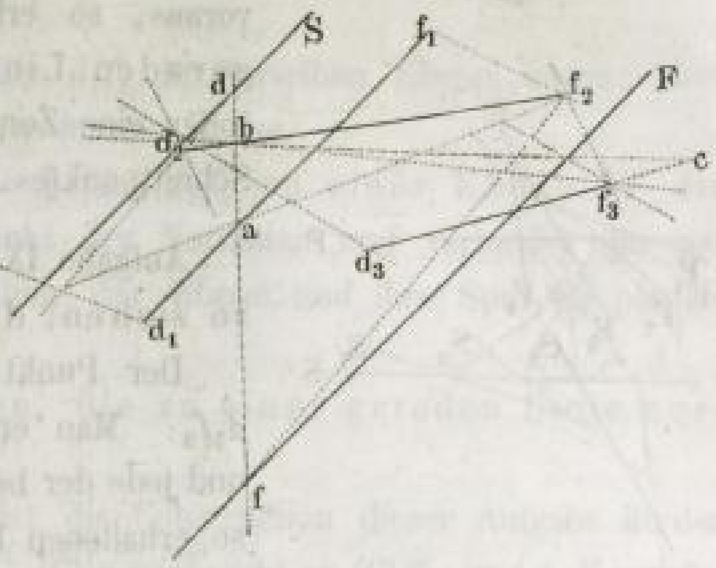
Der Punkt a liegt in der Geraden d_1f_1 und die beiden Geraden der Aufgabe sind d_2f_2, d_3f_3. Die Fluchtlinie der gesuchten Ebene ist die Verbindungslinie von f_2 mit f_3 und zur Bestimmung der Spur reicht ein Punkt hin, den man in dem Durchgangspunkt einer durch a zu der einen Geraden gezogenen Parallellinie findet.

Als einen speciellen Fall dieser Aufgabe kann man die folgende betrachten: Man soll durch einen Punkt eine Ebene legen, die einer gegebenen Ebene parallel ist. Hier sind Fluchtlinie und Spur dieser letztern die beiden gegebenen Geraden und die Fluchtlinie gilt nach der Natur einer solchen auch für die gesuchte Ebene.

Aufgabe VI. (Fig. 4.) Die Ebene darzustellen, welche durch drei Punkte bestimmt ist.

Die Punkte a, b, c liegen resp. in den geraden Linien d_1f_1, d_2f_2, d_3f_3. Man construirt die Durchgangs- und Fluchtpunkte zweier Seiten des Dreiecks abc, oder einer Seite ab und der durch die dritte Ecke c zu ihr gezogenen Parallelen. Spur und Fluchtlinie der Ebene sind die Verbindungslinien der so erhaltenen Durchgangs- und Fluchtpunkte.

Fig. 4.

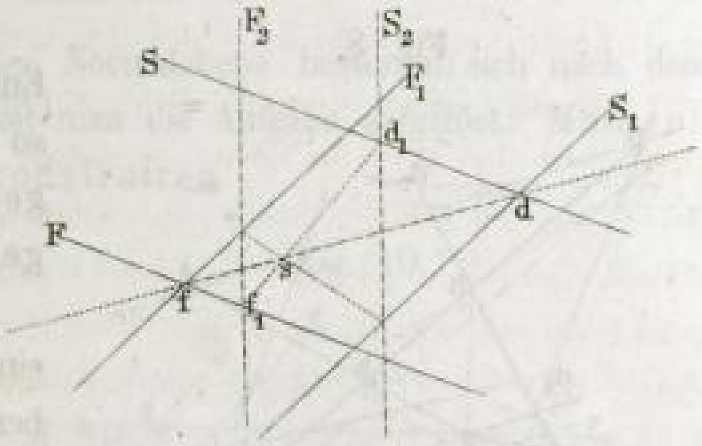


Die Construction vereinfacht sich wesentlich, wenn die geraden Linien, in denen die Punkte a, b, c gelegen sind, als parallel vorausgesetzt werden dürfen.

Aufgabe VII. (Fig. 5.) Es ist die Durchschnittslinie zweier Ebenen anzugeben.

F, F_1 sind die Fluchtlinien, S, S_1 die Spuren dieser Ebenen; der Durchschnittspunkt beider Fluchtlinien ist der Fluchtpunkt der Durchschnittslinie und der Durchschnittspunkt der Spuren ihr Durchgangspunkt; sie ist also die eine Diagonale des aus jenen gebildeten Parallelogramms.

Fig. 5.



Dieselbe kann auch verzeichnet werden, wenn das Parallelogramm selbst entweder nicht bequem und scharf oder überhaupt nicht zu Stande kommt. Wenn nämlich eine dritte Ebene willkürlich gelegt wird, so ist der Durchschnittspunkt der geraden Linien, in denen sie die ersten beiden Ebenen schneidet, ein Punkt in der Durchschnittslinie dieser Ebenen selbst und die Wiederholung des Verfahrens mit einer zweiten Hilfsebene giebt die gesuchte Durchschnittslinie vollständig, auch wenn weder ihr Durchgangspunkt noch ihr Fluchtpunkt zu erlangen wäre. Haben die Ebenen parallele Spuren, so genügt eine Hilfsebene, weil dann die Richtung ihrer Durchschnittslinie dieselbe ist, wie die der Spuren.

Darin ist bereits die Auflösung der beiden folgenden Aufgaben enthalten:

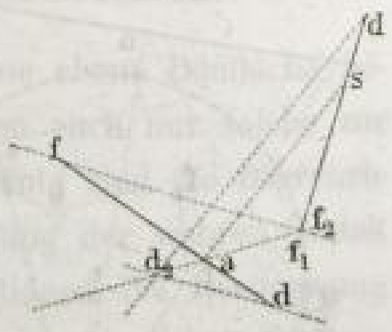
Man soll den Durchschnittspunkt von drei Ebenen bestimmen — und

Man soll den Durchschnittspunkt einer geraden Linie mit einer Ebene construiren. Für diese letztere ist d_1f_1 die gegebene Gerade und s ihr Durchschnittspunkt mit der Ebene F_1S_1; er ist erhalten worden mittelst einer durch die gerade Linie gelegten Hilfsebene FS, welche die Ebene F_1S_1 in der geraden Linie fd durchschneidet.

Wenn hier die Ebene der Bildebene parallel, also durch einen ihrer Punkte a bestimmt ist, so erhält man den Durchschnittspunkt derselben mit einer geraden Linie d_1f_1 wie folgt:

(Fig. 6.) Man denke durch a eine Parallele d_2f_2 zu d_1f_1 gezogen und die Ebene dieser beiden geraden Linien bestimmt; sie schneidet die Ebene der Aufgabe in einer durch a gehenden Parallellinie zu ihrer Spur und wo diese der Linie d_1f_1 begegnet, ist der gesuchte Schnittpunkt s.

Fig. 6.



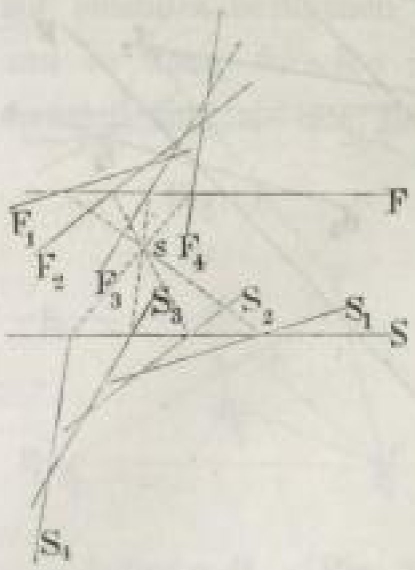
Ebenso kann in den vorhergehenden Aufgaben eine der Ebenen der Bildebene parallel sein.

Wenn dagegen die gerade Linie der Bildebene parallel ist und somit durch ihr Bild und einen Punkt, oder durch einen Punkt und eine Ebene, auf der sie liegt, bestimmt ist, so ist eine Hilfsebene vorhanden oder leicht zu verzeichnen, und die Auflösung bleibt dieselbe.

Aufgabe VIII. (Fig. 7.) Eine Schaar Ebenen zu verzeichnen, die durch denselben Punkt gehen.

Man hat nur dafür zu sorgen, dass die Durchschnittslinien sämmtlicher Ebenen mit einer von ihnen diesen Punkt enthalten, oder dass er in allen Parallelogrammen, die beim Durchschnitt aller übrigen Ebenen mit der ersten zu Stande kommen, der betreffenden Diagonale angehört.

Fig. 7.

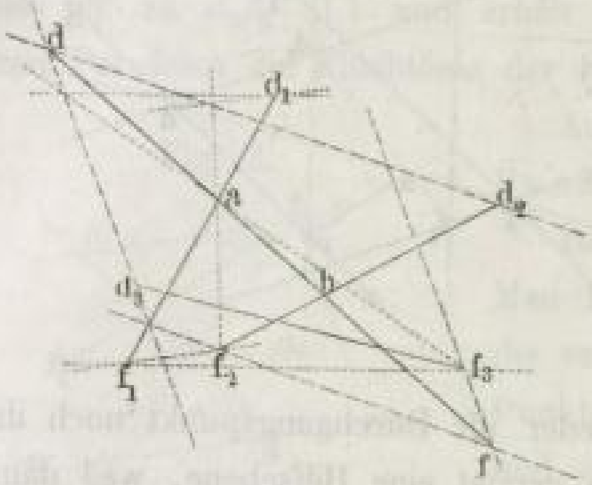


Setzt man diesen gemeinschaftlichen Schnittpunkt in unendlicher Entfernung voraus, so erhält man eine Schaar Ebenen, welche sich in parallelen geraden Linien durchschneiden und die somit einen prismatischen Mantel (oder eine Zone) bilden; in diesem Falle ist das Bild des unendlich entfernten Schnittpunktes der den Fluchtlinien aller Ebenen gemeinschaftliche Punkt.

Aufgabe IX. (Fig. 8.) Man soll durch einen Punkt eine gerade Linie so ziehen, dass sie zwei andere gerade Linien durchschneidet.

Der Punkt a liegt in der Linie $d_1 f_1$ und die gegebenen Geraden sind $d_2 f_2$, $d_3 f_3$. Man erhält die gesuchte gerade Linie, indem man durch den Punkt a und jede der beiden gegebenen eine Ebene legt, denn sie ist die Durchschnittslinie der so erhaltenen Ebenen. Man kann auch nur eine der beiden Ebenen verzeichnen und alsdann ihren Schnittpunkt mit der Geraden, durch welche sie nicht gelegt ist, bestimmen: er liefert mit a verbunden die gesuchte Gerade gleichfalls.

Fig. 8.



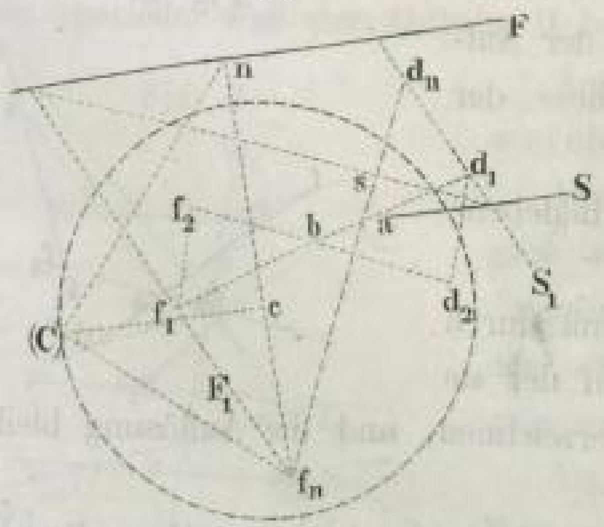
Wenn der gegebene Punkt a in der Geraden $d_1 f_1$ in unendlicher Entfernung liegt, so dass sein Bild mit dem Fluchtpunkt f_1 zusammenfällt, so erhält man ganz ebenso die Auflösung der Aufgabe: Man soll in gegebener Richtung eine Gerade ziehen, welche zwei gegebene Gerade schneidet.

10. Fortsetzung. Den vorhergehenden Aufgaben schliesst sich eine Gruppe an, welche zu dem folgenden Abschnitt dieser Darstellung bereits überführt, insofern in den ihr angehörigen Aufgaben eine bestimmte gegenseitige Lage der Grundgebilde angenommen ist: Aufgaben nämlich, in welchen die normale Lage einer geraden Linie gegen eine Ebene vorausgesetzt oder gefordert wird.

Dass eine gerade Linie zu einer Ebene normal sei, ist eine Relation, die für alle Ebenen und geraden Linien dieselbe bleiben muss, welche dieser Linie und dieser Ebene parallel sind; daraus folgt, dass sie in der Centralprojection nur in der Form einer Abhängigkeit der Lagen zwischen der Fluchtlinie der Ebene und dem Fluchtpunkt der geraden Linie erscheinen kann.

Es ergiebt sich gleichzeitig, dass bei solchen Aufgaben die Eintragung des Distanzkreises nöthig ist, weil erst durch die Bestimmung des Projectionscentrums die Bestimmung der Lage von geraden Linien und Ebenen im Raume durch ihre central-projectivischen Daten vollständig gemacht wird.

Fig. 9.



Aufgabe X. (Fig. 9.) Die Normale zu zeichnen, welche von einem Punkte aus auf eine Ebene gefällt werden kann.

Die Ebene sei SF, der Punkt a in der Linie $d_1 f_1$; man hat zu der Fluchtlinie F der Ebene den Fluchtpunkt f_n der Normalen zu bestimmen; der Durchgangspunkt derjenigen Normale, die durch a geht, ergiebt sich dann nach dem Früheren. Jene Bestimmung wird durch die Bemerkung bewirkt, dass das Projectionscentrum C, der Fluchtpunkt f der Normale und der Fusspunkt n der Senkrechten, welche man vom Projectionscentrum auf die Fluchtlinie der Ebene fällt, ein bei C rechtwinkliches Dreieck bilden. Dasselbe ist bestimmt, da man den der Fluchtlinie zunächst liegenden Abschnitt der Hypothenuse: das Perpendikel $c\,n$ vom Hauptpunkte auf die Fluchtlinie, und die in dem Endpunkt c derselben aufstehende Höhe: die Distanz, kennt; der andere Endpunkt der Hypothenuse ist der Fluchtpunkt aller Normalen solcher Ebenen, welche F zur Fluchtlinie haben.

Man denkt sich das Dreieck Cnf_n in $(C)\,n\,f_n$ in die Bildebene niedergelegt und erhält so die folgende Construction: Man zieht vom Hauptpunkt eine Senkrechte cn auf die Fluchtlinie und eine Parallele $c(C)$ zu ihr bis zum Distanzkreis, errichtet in (C) auf $(C)n$ eine Senkrechte und bestimmt ihren Durchschnittspunkt f_n mit cn.*)

Die Normale durch a muss mit der a bestimmenden Geraden $d_1 f_1$ in derselben Ebene liegen; dies bestimmt ihren Durchgangspunkt d_n und darnach ihren Fusspunkt s in der Ebene.

Damit ist zugleich die Aufgabe gelöst: Durch eine gerade Linie $d_1 f_1$ zu einer Ebene SF die Normalebene $S_1 F_1$ zu legen. Man bestimmt den Fluchtpunkt der Normalen und verbindet ihn mit dem Fluchtpunkte der gegebenen Geraden; dies liefert die Fluchtlinie der Ebene und ihre Spur ist parallel zur Fluchtlinie und geht durch den Durchgangspunkt der Geraden.

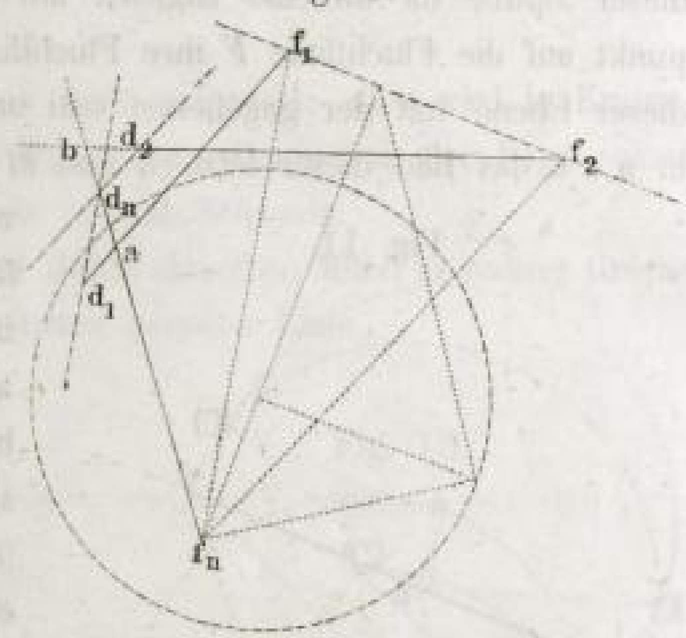
Aufgabe XI. Durch einen Punkt eine Ebene zu legen, die zu einer geraden Linie normal ist.

Wenn df die gerade Linie, b in $d_2 f_2$ der Punkt ist, so ist die Construction dieser Aufgabe in der vorigen enthalten: Man bestimmt durch $c f_n$, $c(C)$ senkrecht zu $c f_n$, $(C)\, n$ senkrecht zu $(C) f_n$ und $n\, F$ parallel $c\,(C)$ die Fluchtlinie F der Ebene, zieht durch den Punkt b in ihr eine beliebige Gerade und durch den Durchgangspunkt derselben die Spur der Ebene.

Der Durchschnittspunkt der geraden Linie mit der construirten Normalebene bestimmt sich nach dem Früheren; indem man ihn mit dem gegebenen Punkte verbindet, hat man die Aufgabe aufgelöst: Man soll die Senkrechte von einem Punkt auf eine gerade Linie construiren.

Aufgabe XII. (Fig. 10.) Die gemeinschaftliche Normale zweier geraden Linien zu bestimmen.

Fig. 10.



Die beiden geraden Linien sind $d_1 f_1$, $d_2 f_2$; die Auflösung kann mehrere Formen annehmen, unter denen hier die folgende benutzt werden mag: Zu einer Ebene, welche zu beiden Geraden parallel ist — man bedarf nur ihrer Fluchtlinie $f_1 f_2$ — legt man durch jede derselben eine Normalebene und bestimmt die Durchschnittslinie dieser letzteren: sie ist die gemeinschaftliche Normale.

Die Construction nimmt die einfache Form der beistehenden Figur an; $d_n\, f_n$ ist die gemeinschaftliche Normale und das Stück a b derselben bildet die kürzeste Entfernung der beiden Geraden ab.

Die speciellen Fälle dieser letzteren Gruppe von Aufgaben sind besonderer Beachtung werth. Für die Aufgabe XII z. B. die specielle Voraussetzung, dass die eine der gegebenen Geraden zur Bildebene normal sei.

B. Von der Ableitung der wahren Grösse und Lage projicirter Raumformen.

11. Grundsätze und Hauptaufgabe. Jede Projectionsmethode, welche eine ebene Bildfläche benutzt, kann nur ebene Elemente in ihrer wahren Gestalt und Grösse darstellen, also auch nur solche zur Bestimmung der Grösse, Form und Lage räumlicher Systeme benutzen. Diese Elemente sind die begrenzte gerade Linie und der Winkel; ihre zusammengesetzte Verwendung liefert die Bestimmung der wahren Gestalt und Grösse ebenflächiger Systeme und an der Hand elementar-geometrischer Definitionen die Bestimmung der wahren gegenseitigen Lage von Linien und Ebenen im Raum und die Bestimmung räumlicher Systeme überhaupt.

Die Darstellung solcher ebenen Elemente in wahrer Grösse wird dadurch erlangt, dass man sie mit ihrer

*) Demnach wird die Lage der Fluchtlinie eine Ebene und die Lage des Fluchtpunktes ihrer Normalen durch das Gesetz beherrscht: der Fluchtpunkt der Normalen liegt in der vom Hauptpunkt auf die Fluchtlinie derselben gefällten Senkrechten und das Rechteck aus den Entfernungen der Fluchtlinie und des Fluchtpunktes vom Hauptpunkte ist gleich dem Quadrate der Distanz.

Ebene durch Drehung um die Spur derselben zum Zusammenfallen mit der Bildebene bringt und die Lage angiebt, welche sie am Ende dieser Drehung angenommen haben.

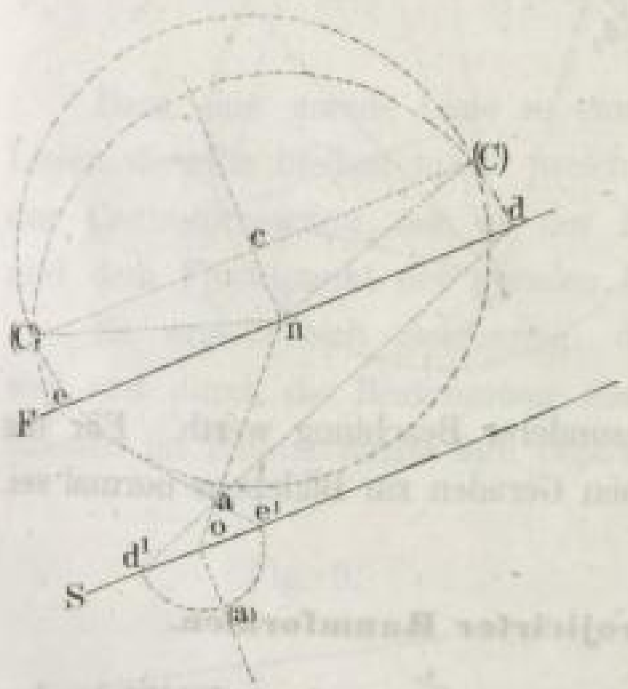
Wenn es sich nur um die Grösse von Winkeln handelte, so würde es genügen, die Ebene derselben durch Drehung um eine beliebige in ihr gezogene Parallele zur Bildebene mit dieser parallel zu machen, und in dieser Lage dieselben zu verzeichnen. Bei diesem Verfahren würden alle Längen in dem Verhältnisse verjüngt erscheinen, in welchem die Distanz zum Abstand der gedachten Parallelebene vom Projectionscentrum steht. In Fällen, wo die Drehung bis zum Zusammenfallen mit der Bildebene nicht gut ausführbar ist, kann man das letztere Verfahren als ausreichenden und zweckmässigen Ersatz dafür betrachten; eine besondere Untersuchung erfordert es nicht, weil es durch eine Parallelverschiebung der Bildebene und eine entsprechende Aenderung der Distanz auf jenes erste zurückgeführt werden kann.

Diese Drehung einer Ebene in die Bildebene zu dem Endzweck der Bestimmung von Elementen der Grösse und Lage soll als ein Herabschlagen bezeichnet werden.

Dann ist die Hauptaufgabe dieses Abschnitts die folgende: Man soll einen Punkt mit einer Ebene, welche ihn enthält, in die Bildebene herabschlagen.

Sie wird durch folgende Betrachtungen gelöst: Sei F die Fluchtlinie und S die Spur der Ebene, a die Projection des Punktes a′ in derselben, C das Projectionscentrum und c der Hauptpunkt; so bewegt sich der Punkt a′ bei der vorzunehmenden Drehung der Ebene $S\,F$ um ihre Spur S in einer Normalebene zu dieser Spur; da dieselbe zugleich auf der Bildebene senkrecht ist, so ist die Senkrechte $c\,n$ vom Hauptpunkt auf die Fluchtlinie F ihre Fluchtlinie. Die Bemerkung, dass n der Fluchtpunkt der Durchschnittslinie dieser Ebene mit der gegebenen sein und dass diese Durchschnittslinie den Punkt a′ enthalten muss, liefert in n a o das Bild dieser letztern und in der durch o zu $c\,n$ gezogenen Parallelen die Spur der Ebene, in welcher die Bewegung des Punktes a′ geschieht. In diese Spur gelangt der Punkt am Ende der Bewegung und um seine Lage völlig zu bestimmen, hat man nur die Länge a′o in derselben von o aus aufzutragen. Wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke $C\,n$ a und a′o a hat man $C n : n\,\mathrm{a} = o\,\mathrm{a} : o\,a'$. Diese Proportion wird aber construirt, indem man $n\,(C)$ auf die Fluchtlinie der Ebene von n aus rechts (d) oder links (e) aufträgt und den so erhaltenen Punkt mit a durch eine Linie verbindet, welche die Spur in d' oder e' schneidet. Wegen $d\,n : n\,\mathrm{a} = o\mathrm{a} : d'o$ muss, wenn $d\,n = n\,C$ war, $d'o = \mathrm{a}'o$ sein und man hat nun $d'o$ von o aus auf die Spur der Ebene abzutragen, in welcher die Drehung geschieht, um den herabgeschlagenen Punkt (a) zu erhalten. Dies liefert die beistehende Construction, wenn a das Bild des Punktes in der Ebene $S\,F$ ist. (Fig. 11.)

Fig. 11.



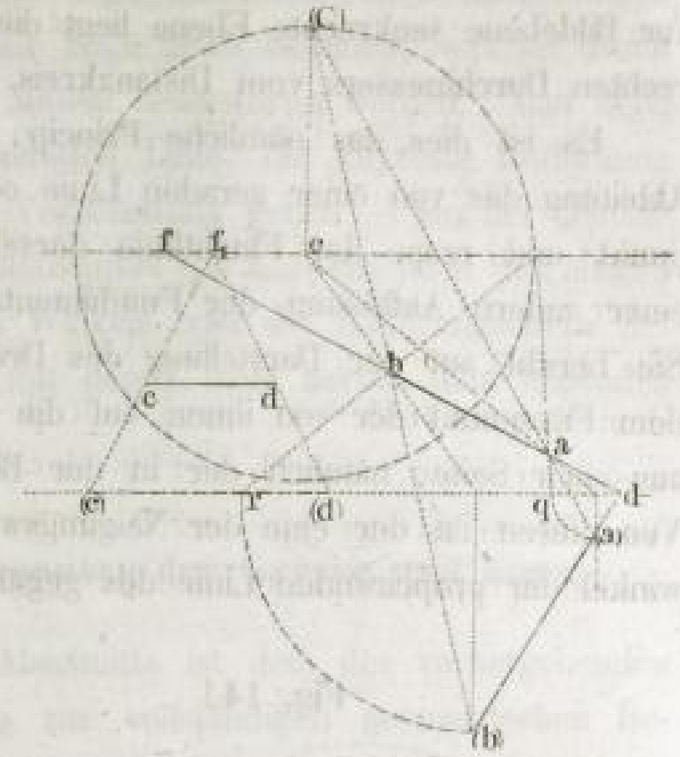
Wenn die Ebene zur Bildebene senkrecht ist, so vereinfacht sich die Construction durch den Umstand, dass die Fluchtlinie durch den Hauptpunkt geht.

12. Anwendungen. Wie aus der Auflösung des Hauptproblems und den dargelegten Grundsätzen die wirkliche Ableitung der wahren Grössen von Linien und Winkeln hervorgeht, wird durch die Reihe der folgenden Aufgaben erläutert.

Aufgabe I. (Fig. 12.) Die wahre Länge einer geradlinigen Strecke zu construiren.

Die Strecke ab gehöre der geraden Linie $d\,f$ an; man muss dieselbe mit einer sie enthaltenden Ebene in die Bildebene herabschlagen und die dann von den Punkten a, b angenommene Lage angeben. Vor allen andern Ebenen, welche die Gerade enthalten, empfiehlt sich durch die einfache Form der Construction die zur Bildebene senkrechte Ebene. Nach dieser Construction ist (a)(b) die wahre Länge. Wenn man den Durchgangspunkt der Geraden, als einen Punkt, der bei der Drehung seine Lage behält, in der Construction benutzt, so ist dieselbe nur für einen, den entfernteren, der beiden Punkte (b) vollständig auszuführen. *)

Fig. 12.



Wenn die gerade Linie selbst zur Bildebene senkrecht ist, sodass ihr Fluchtpunkt mit dem Hauptpunkt zusammenfällt, so vereinfacht sich diese Construction noch mehr, weil dann die beiden Kreisbögen, welche zuletzt die Bestimmung der herabgeschlagenen Punkte liefern, concentrisch sind — der Durchgangspunkt der geraden Linie ist ihr gemeinsamer Mittelpunkt — und somit die wahre Länge schon bei $q\,r$ erhalten wird.

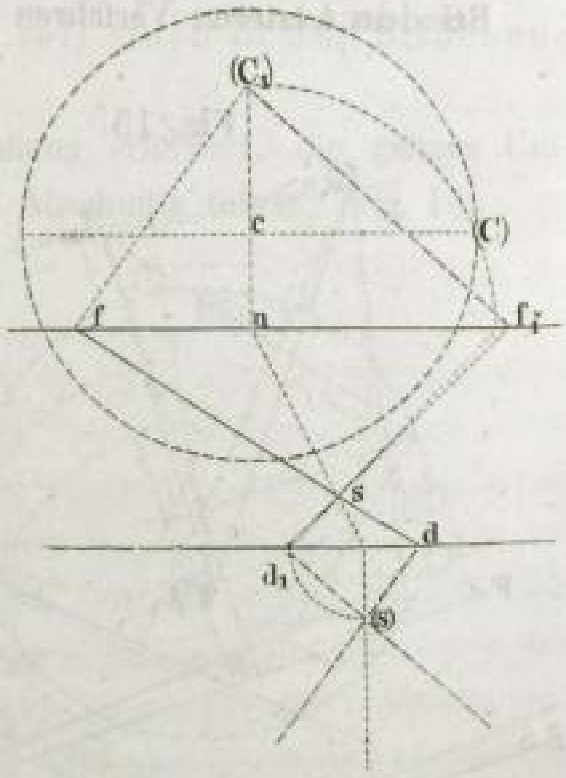
Ist dagegen die gerade Linie der Bildebene parallel, so kennt man nach dem Frühern nothwendig zugleich eine Ebene, auf welcher sie liegt, und erfährt dann ihre wahre Länge durch diese Betrachtung: Wenn man durch die Endpunkte c, d der geraden Linie in der Ebene irgend ein Paar Parallelen zieht, so ist das zwischen ihnen in der Spur der Ebene oder in der Bildebene enthaltene Stück der geraden Linie gleich und demnach ihre wahre Länge. Wenn man also irgend einen Punkt f_1 in der Fluchtlinie der Ebene mit den Endpunkten der Strecke verbindet, so fassen die Verbindungslinien in der Spur der Ebene die wahre Länge $(c)(d)$ der gegebenen Strecke zwischen sich.

In dieser Construction wird die Angabe des Projectionscentrums nicht erfordert; dies wird in Erinnerung an die Note des Art. 6 über die Abhängigkeit der Lage eines Punktes im Raum von der Lage seines Bildes gegen die Spur und Fluchtlinie einer durch ihn gelegten Ebene verständlich sein.

Jedes durch beliebig viele Punkte bestimmte ebene System wird durch dieselben Mittel in wahrer Grösse und Form dargestellt, wie hier das zweipunktige System einer begrenzten geraden Linie.

Aufg. II. (Fig. 13.) Die wahre Grösse des von zwei geraden Linien gebildeten Winkels zu bestimmen.

Fig. 13.



Von den beiden geraden Linien $d\,f$ und $d_1 f_1$ wird vorausgesetzt, dass sie sich in einem Punkte s schneiden. Man schlägt den Winkel mit seiner Ebene in die Bildebene herab und bemerkt, dass dazu das Herabschlagen seines Scheitels genügt, weil alsdann die Durchgangspunkte der Schenkel zur Bestimmung der Lage dieser letzteren hinreichen.

Diese Construction vereinfacht sich, wenn die Ebene des Winkels, oder noch specieller der eine Schenkel desselben zur Bildebene normal ist.

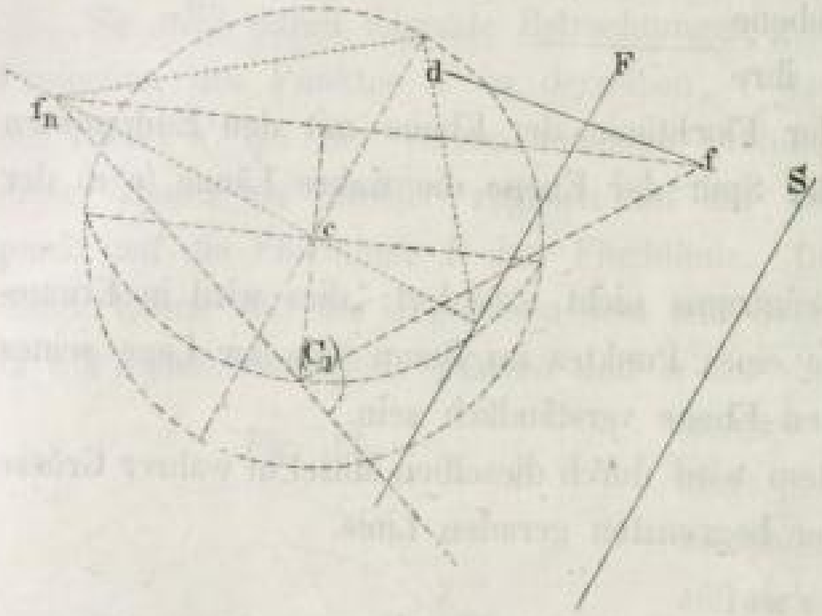
Für diese Aufgabe und für alle die, welche ihr folgen, ist die Bemerkung von Werth, dass der Winkel, den zwei gerade Linien mit einander einschliessen, derselbe ist, wie der Winkel, welche die Verbindungslinien ihrer Fluchtpunkte mit dem Projectionscentrum an diesem letzteren bilden. Der Winkel zweier Linien bestimmt sich demnach schon aus ihren Fluchtpunkten allein; man hat nur das Dreieck, welches diese und das Projectionscentrum zu Ecken hat, in die Bildebene

*) Man sieht aus der Construction für das Herabschlagen eines Punktes, wie das Herabschlagen des Projectionscentrums mit der durch dasselbe gelegten Parallelebene mit dem Herabschlagen der Ebene selbst correspondirt; in Folge dessen convergiren auch alle die geraden Verbindungslinien der herabgeschlagenen Punkte mit den entsprechenden Projectionen derselben in dem herabgeschlagenen Projectionscentrum. Man nennt diesen Punkt, der in den folgenden Constructionen vielfältig von Nutzen sein kann, das Centrum der Collineation.

herabzuschlagen, um darin an der letztbezeichneten Ecke den gesuchten Winkel zu erhalten.*) Für eine zur Bildebene senkrechte Ebene liegt diese stets in einem Endpunkt des auf der Fluchtlinie derselben senkrechten Durchmessers vom Distanzkreis.

Es ist dies das nämliche Princip, welches schon in dem Früheren (Art. 4 und 7) zu der einfachen Ableitung des von einer geraden Linie oder Ebene mit der Bildebene gebildeten Winkels aus dem Fluchtpunkt und resp. der Fluchtlinie derselben geführt hat. Mit Hilfe dieser letzteren kann man übrigens zu einer andern Auflösung der Fundamental-Aufgabe dieses Abschnittes gelangen, welche bemerkenswerth ist. Sie beruht auf der Darstellung des Dreiecks, welches von dem gegebenen Punkte, seiner Projection und dem Fusspunkt der von ihnen auf die Spur der Ebene gefällten Senkrechten gebildet wird. Dasselbe wird aus einer Seite, nämlich der in der Bildebene gelegenen, und den beiden anliegenden Winkeln construirt. Von diesen ist der eine der Neigungswinkel der Ebene gegen die Bildebene und der andere der Neigungswinkel der projicirenden Linie des gegebenen Punktes gegen dieselbe.

Fig. 14.



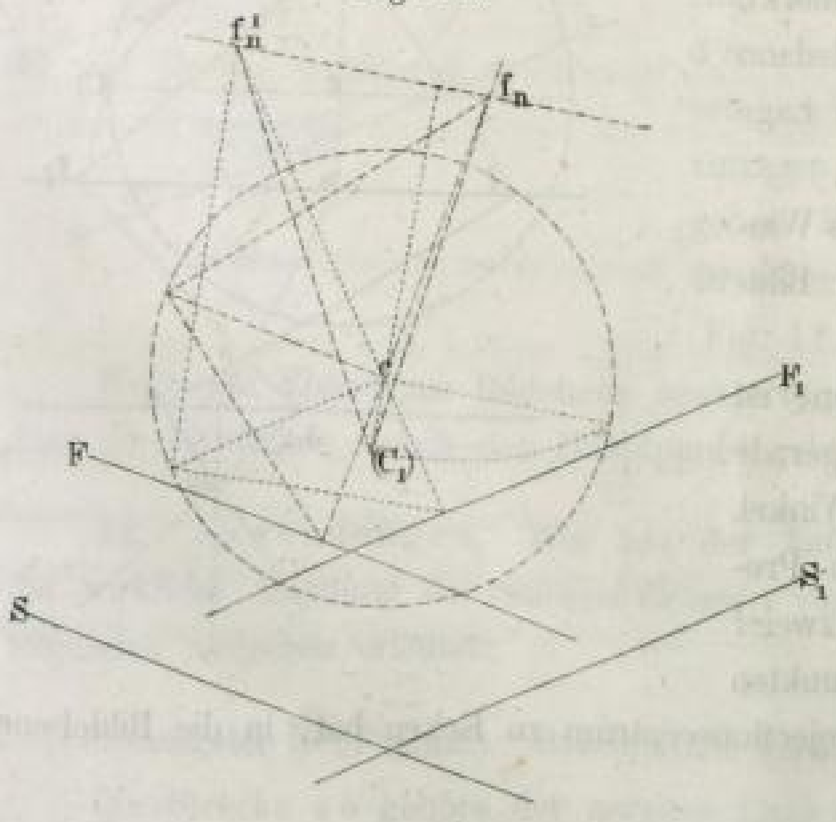
Aufgabe III. (Fig. 14.) Den Neigungswinkel einer geraden Linie gegen eine Ebene zu construiren.

Man verfährt nach der geometrischen Definition, legt also durch die gerade Linie eine Ebene senkrecht zu der gegebenen, construirt ihre Durchschnittslinie mit derselben und bestimmt den von dieser letztern mit der gegebenen Geraden gebildeten Winkel.

Oder man bestimmt für die Ebene $F\ S$ den Fluchtpunkt f_n der Normalen und aus diesem und dem Fluchtpunkt f der gegebenen Geraden den Winkel, welchen diese letztere mit einer Normale der Ebene einschliesst; der gesuchte Neigungswinkel ist das Complement desselben.

Bei dem letzteren Verfahren nimmt die zur Auflösung nöthige Construction ihre einfachste Form an.

Fig. 15.



Aufgabe IV. (Fig. 15.) Den Neigungswinkel zweier Ebenen zu construiren.

Man bestimmt entweder die Durchschnittslinie beider Ebenen und eine zu ihr normale Ebene, construirt deren Durchschnittslinien mit den Ebenen der Aufgabe und schlägt den von ihnen gebildeten Winkel herab; oder man zeichnet die Normalen beider Ebenen und bestimmt die wahre Grösse des von ihnen gebildeten Winkels. In beiden Fällen hat man nur mit den Fluchtlinien und Fluchtpunkten zu operiren; auch ist es nicht nöthig, die Durchschnittslinie beider Ebenen nach der ersten Methode zuvor zu construiren, um die Normalebene des Flächenwinkels zu bestimmen. Die einfachste Gestalt erhält die Construction nach der zweiten Methode, wo man aus den Fluchtpunkten der Normalen ohne Weiteres den Winkel derselben, d. i. auch den der Ebenen herleitet. Sie ist in beistehender Figur verzeichnet. $F\ S$ und $F_1 S_1$

*) Nach der letzten Note kann man sagen: Der Winkel zweier geraden Linien wird von den Verbindungslinien ihrer Fluchtpunkte mit dem Collineationscentrum an diesem letzteren eingeschlossen. Allen parallelen Ebenen entspricht der nämliche Punkt als Collineationscentrum.

sind die beiden Ebenen, f_n und f_n' die Fluchtpunkte ihrer Normalen, $f_n\,(C)\,f_n'$ der fragliche Neigungswinkel. Man könnte die Zahl dieser Aufgaben sehr vermehren, ohne doch wesentlich Neues dem Vorigen hinzuzufügen. Jede Frage nach den Abmessungen und der räumlichen Lage eines Gebildes, welches durch seine Centralprojection bestimmt ist, kann mit den bisher entfalteten Mitteln beantwortet werden. Man kann die Entfernung eines Punktes von einer Ebene oder von einer geraden Linie, die kürzeste Entfernung zweier geraden Linien — Forderungen, zu welchen frühere Aufgaben Veranlassung geben — aus der Centralprojection ableiten nach Aufgabe I; man kann Flächenwinkel und Kantenwinkel von Körpern nach den andern Aufgaben bestimmen; man kann auch leicht die Halbirungslinie eines Winkels oder die Halbirungsebene des von zwei Ebenen gebildeten Flächenwinkels construiren, Aufgaben, mit denen man bereits dem folgenden Abschnitt entgegenführt. Für alles das genügen diese Andeutungen.

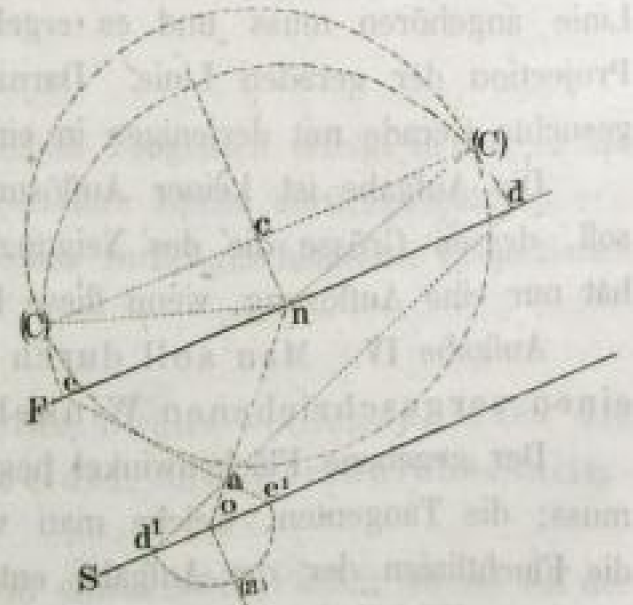
C. **Von der Ableitung der Projection aus gegebenen Elementen der Grösse und Lage.**

13. Grundsätze und Hauptaufgabe. Der Zweck dieses Abschnitts ist dem des vorhergehenden genau entgegengesetzt: die Methoden des vorigen Abschnitts führen zur vollständigen geometrischen Bestimmung des dargestellten Raumgebildes aus der vorhandenen Projection desselben, die des jetzigen von der geometrischen Bestimmung zur richtigen Projection; jener enthält die Lehre vom richtigen Gebrauch central-projectivischer Zeichnungen, dieser die Anweisung zur richtigen zweckentsprechenden Anfertigung solcher Projectionen. Beide müssen zu dem ersten Abschnitt, in welchem die Projectionsmethode selbst begründet ist, hinzugefügt werden, um dieser ihre volle Brauchbarkeit zu geben.

Wie in dem vorigen Abschnitte Alles aus der Grundvorstellung des Herabschlagens mit einer Ebene hergeleitet wurde, so ist es der Vorgang des Zurückschlagens, auf welchen, im engsten Zusammenhange mit dem Vorhergehenden, alle Aufgaben, wie die Zwecke dieses Abschnitts sie darbieten, reducirt werden. Man denkt sich die Punkte des Raumgebildes mit den Ebenen, in welchen sie liegen, in die Bildebene herabgeschlagen und in der so eingenommenen Lage gegeben; um ihre Projectionen richtig zu bestimmen, hat man diese Ebenen mit den ihnen angehörigen Punkten durch Drehung um ihre resp. Spuren in die Lagen zurückzuführen, welche ihnen zukommen und die Projectionen der Punkte in der zuletzt erreichten Lage zu construiren. Die Hauptaufgabe dieses Abschnitts heisst daher: Man soll einen in der Bildebene gegebenen Punkt in eine bestimmte Ebene zurückschlagen.

Die Auflösung derselben ist, wie die ihr zu Grunde liegende Vorstellung erfordert, die genaue Umkehrung der Construction, die zur Auflösung der Hauptaufgabe des vorigen Abschnitts führte. (Fig. 16.)

Fig. 16.



Die Ebene ist durch S, F, der Punkt durch (a) bestimmt; man fällt von ihm das Perpendikel (a) o auf die Spur, vom Hauptpunkt das Perpendikel $c\,n$ auf die Fluchtlinie und zieht $n\,o$; man zieht durch den Hauptpunkt die Parallele $c\,(C)$ bis zum Distanzkreis und trägt die Länge $(C)\,n$ von n aus in der Fluchtlinie ab; ebenso den Abstand (a) o von o in der Spur. Die gerade Linie, welche die so bestimmten Punkte verbindet, bestimmt in der Geraden $n\,o$ das Bild des Punktes a. Man erhält es an zwei verschiedenen Stellen, je nach dem Sinn der Drehung, durch welche man den herabgeschlagenen Punkt in seine Ebene zurückgeführt denkt.

Wieder lässt sich jener Punkt in der Construction vortheilhaft benutzen, welcher für die Ebene durch seine Verbindung mit den Fluchtpunkten der in derselben liegenden Geraden die Grösse der von ihnen gebildeten Winkel angiebt. (Art. 12. Aufg. I. Anmerkung.) Wenn die Ebene zur Bildebene senkrecht ist, so vereinfacht sich die Construction, und der eben bezeichnete Punkt liegt alsdann im Distanzkreis.

14. **Aufgaben zur Anwendung.** In einer Reihe von Aufgaben soll gezeigt werden, wie aus der Auflösung dieser Hauptaufgabe die Behandlung und Auflösung solcher Aufgaben hervorgeht, welche man sich bei der Entwickelung der Centralprojection einer bekannten Raumgestalt vorzulegen hat.

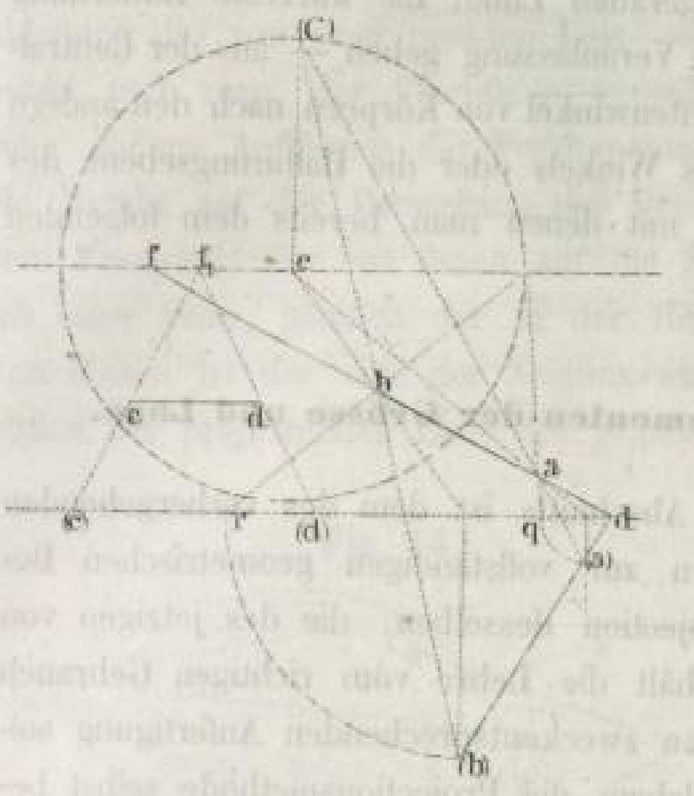


Fig. 17.

Aufgabe I. (Fig. 17.) Man soll auf einer geraden Linie von einem ihrer Punkte aus eine gegebene Länge abtragen.

Die gerade Linie sei *df*, der Punkt in ihr a und a *b* die gegebene Strecke. Man schlägt die gerade Linie und den Punkt a mit einer sie enthaltenden Ebene in die Bildebene herab, trägt dort von (a) aus die gegebene Strecke auf und schlägt alsdann den Endpunkt (*b*) derselben in die angenommene Ebene zurück.

Man wählt als solche am besten die zur Bildebene senkrechte Ebene, welche durch die gerade Linie gelegt werden kann.

Aufgabe II. (Fig. 18.) Man soll durch einen Punkt eine gerade Linie ziehen, die mit einer andern geraden Linie einen vorgeschriebenen Winkel bildet.

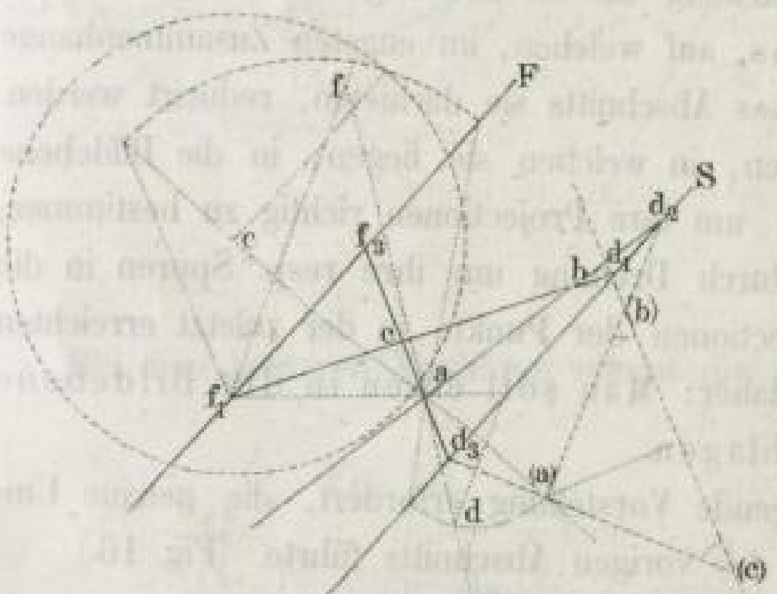


Fig. 18.

Man bestimmt die Ebene, welche den Punkt a und die gerade Linie $f_1 d_1$ enthält, schlägt beide mit derselben in die Bildebene herab und trägt in dieser letzteren den gegebenen Winkel an; man hat dann nur den neu erhaltenen Schenkel dieses Winkels in die gedachte Ebene zurückzuschlagen; $d_2 f_2$ und $d_3 f_3$ oder a *b*, a *c* sind die verlangten Geraden.

Wenn der gegebene Punkt in der geraden Linie selbst gedacht wird, so dass er der Scheitel des verlangten Winkels ist, so muss die Ebene desselben durch die Aufgabe sonst bestimmt sein, um diese letztere auflösen zu können.

Aufgabe III. Man soll eine gerade Linie bestimmen aus einem ihrer Punkte, ihrer projicirenden Ebene und dem Winkel, den sie mit der Bildebene einschliesst.

Durch den angegebenen Winkel bestimmt sich der Neigungskreis, welchem der Fluchtpunkt der verlangten geraden Linie angehören muss und es ergeben sich daraus im Allgemeinen zwei Lagen des Fluchtpunktes in der Projection der geraden Linie. Darnach bestimmt sich ihr Durchgangspunkt durch die Bemerkung, dass die gesuchte Gerade mit derjenigen in einer Ebene liegen muss, welche den gegebenen Punkt enthält.

Die Aufgabe ist keiner Auflösung fähig, wenn die gerade Linie mit der Bildebene einen Winkel bilden soll, dessen Grösse die des Neigungswinkels der projicirenden Ebene gegen die Bildebene übertrifft und sie hat nur eine Auflösung, wenn diese beiden Winkel einander gleich sind.

Aufgabe IV. Man soll durch eine gerade Linie eine Ebene legen, die mit der Bildebene einen vorgeschriebenen Winkel bildet.

Der gegebene Flächenwinkel bestimmt den Neigungskreis, welchen die Fluchtlinie der Ebene berühren muss; die Tangenten, welche man vom Fluchtpunkt der gegebenen Geraden aus an ihn ziehen kann, sind die Fluchtlinien der der Aufgabe entsprechenden Ebenen. Die Aufgabe hat zwei Auflösungen, so lange der gegebene Winkel den Neigungswinkel der gegebenen Geraden gegen die Bildebene übertrifft, ohne ein Rechter zu sein; eine Auflösung, wenn er ihm gleich ist, und keine, wenn er seine Grösse nicht erreicht.

Unter den speciellen Fällen kann man denjenigen hervorheben, in welchem die gegebene gerade Linie der Bildebene angehört, also die Spur der gesuchten Ebene selbst ist.

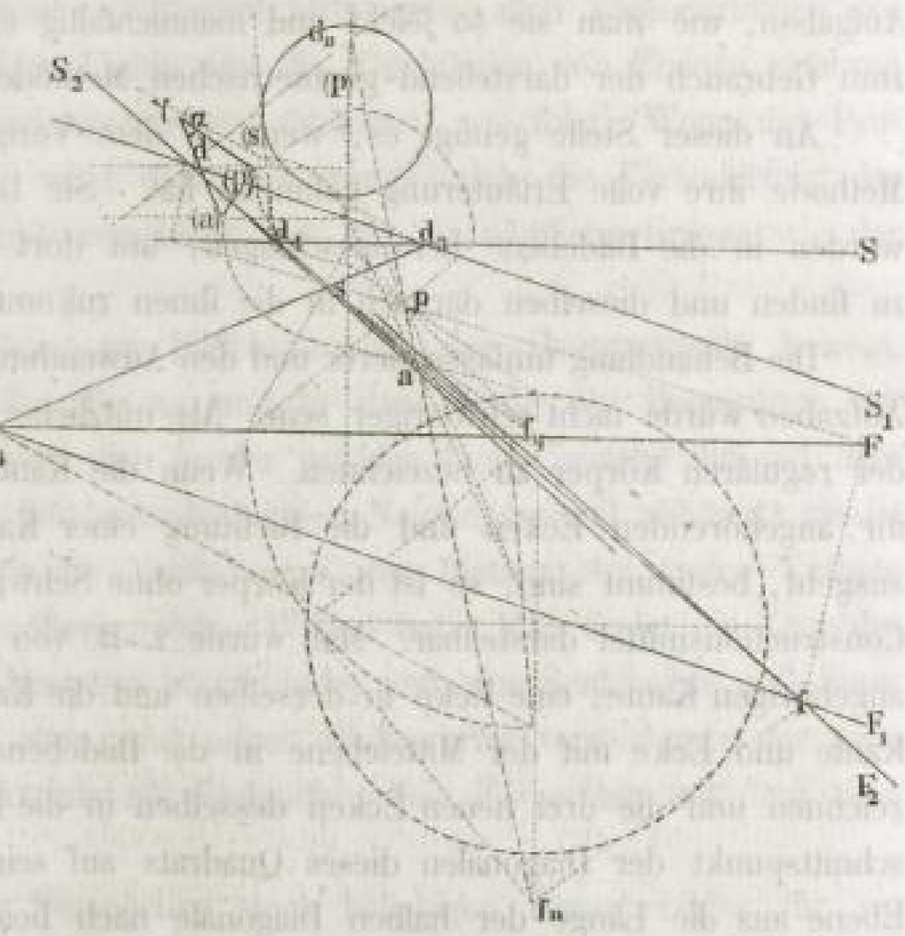
Aufgabe V. **Eine gerade Linie ist durch einen ihrer Punkte, durch ihre Ebene und den Winkel zu bestimmen, den sie mit einer andern Ebene einschliesst.**

Man verzeichnet die Durchschnittslinie beider Ebenen der Aufgabe und fällt auf die letztgenannte Ebene von dem gegebenen Punkte aus eine Senkrechte; wenn man aus der Länge derselben — man leitet sie aus der Projection ab — als Kathete und dem gegebenen Winkel als dem ihr gegenüberliegenden ein rechtwinkliches Dreieck construirt, so ist dessen andere Kathete der Halbmesser eines vom Fusspunkte jenes Perpendikels aus in der Ebene beschriebenen Kreises, in dessen Peripherie der Durchschnittspunkt der gesuchten geraden Linie mit der Ebene nothwendig liegen muss. Er ist demnach einer der Punkte, in welchen dieser Kreis von der vorher construirten Durchschnittslinie beider Ebenen geschnitten wird und die Aufgabe ist nicht lösbar, wenn diese den Kreis gar nicht trifft. Im andern Falle sind die Verbindungslinien der erhaltenen Durchschnittspunkte mit dem gegebenen Punkte die gesuchten geraden Linien. Die Auftragung des Kreises und die Bestimmung der Durchschnittspunkte erfolgt in der in die Bildebene herabgeschlagenen Figur und nur die erhaltenen Punkte selbst werden in die Ebene der Aufgabe zurückgeschlagen.

Die Aufgabe III ist ein specieller Fall der gegenwärtigen.

Aufgabe VI. (Fig. 19.) **Durch eine gerade Linie soll eine Ebene so gelegt werden, dass sie mit einer andern Ebene einen bestimmten Flächenwinkel bildet.**

Fig. 19.



Man bestimmt den Schnittpunkt s der geraden Linie fd mit dieser Ebene $F\,S$ und fällt von einem Punkte a der ersteren ein Perpendikel ap auf die letztere, dessen Fusspunkt und dessen Länge $(a)(p)$ man bestimmt; aus dieser Länge und dem gegebenen Neigungswinkel α als dem ihr gegenüberliegenden Winkel in einem rechtwinklichen Dreieck bestimmt sich in der andern Kathede rs desselben der Halbmesser eines in der Ebene um jenen Fusspunkt beschriebenen Kreises, welcher von der Durchschnittslinie der gesuchten Ebene mit der gegebenen berührt werden muss. Wenn man von dem Durchschnittspunkt der gegebenen geraden Linie und Ebene an diesen Kreis Tangenten zieht, so sind diese die Durchschnittslinien der der Aufgabe genügenden Ebenen mit der gegebenen und dieselben sind nun durch zwei sich schneidende Gerade bestimmt.

Die Auftragung des Kreises und die Construction der beiden möglichen Tangenten erfolgt in der in die Bildebene herabgeschlagenen Zeichnung und die Tangenten werden dann in ihre Ebene zurückgeschlagen.

In der Figur sind $(s)\,d_3$, $(s)\,d_4$ diese Tangenten, d_3f_3 und d_4f_4 ihre zurückgeschlagenen Projectionen und F_1S_1 und F_2S_2 die verlangten Ebenen.

Von dieser Aufgabe ist die Aufgabe IV ein specieller Fall.

Aufgabe VII. **Man soll durch einen gegebenen Punkt eine Ebene so legen, dass die geraden Linien, in denen sie zwei bestimmte Ebenen schneidet, mit der Durchschnittslinie dieser letzteren bestimmte Winkel bilden.**

Man construirt die Durchschnittslinie der beiden Ebenen und trägt in einem ihrer Punkte an sie auf der einen und der andern Ebene den entsprechenden Winkel an; dann ist durch den gegebenen Punkt eine Ebene zu legen, welche den beiden neu erhaltenen Schenkeln dieser Winkel parallel ist.

Weil das Antragen der Winkel nach zwei verschiedenen Seiten geschehen kann, so erhält man zwei Ebenen, welche der Aufgabe genügen.

Man kann die Aufgabe als einen Fall von der Construction der dreiseitigen Ecke auffassen, nämlich als die Bestimmung derselben aus zwei Kantenwinkeln und dem eingeschlossenen Flächenwinkel; so lange dieser Flächenwinkel kein Rechter ist, genügt nur die eine der erhaltenen Ebenen den Bedingungen der Aufgabe, denn die andere gehört einer Nebenecke der bezeichneten an.

Die Aufgabe: Durch einen Punkt eine Ebene so zu legen, dass sie mit zwei bestimmten Ebenen vorgeschriebene Flächenwinkel einschliesst — entspricht der Bestimmung der dreiseitigen Ecke aus drei Flächenwinkeln; auch alle übrigen Bestimmungsfälle der dreiseitigen Ecke lassen sich als leichte Anwendungen hier behandeln. Nur der eine sei noch erwähnt: die Bestimmung der dreiseitigen Ecke durch drei Kantenwinkel, welche der Aufgabe entspricht: Man soll eine gerade Linie construiren, welche mit zwei gegebenen geraden Linien vorgeschriebene Winkel bildet.

Alle Constructionsfälle der dreiseitigen Ecke lassen sich wie die hier bezeichneten, als Fälle der Bestimmung der Lage von Ebenen oder geraden Linien mit festen Ebenen oder festen Geraden auffassen.

15. Von der Behandlung ebenflächiger Raumformen im Allgemeinen. Es wird nicht beabsichtigt, die Reihe solcher Aufgaben hier vollständig aufzuzählen und zu besprechen, selbst sehr einfache und naheliegende, wie z. B. die Construction einer Parallelebene zu einer gegebenen in vorgeschriebener Entfernung, wären noch hinzuzufügen. Jeder Anfänger wird wohl thun, sich gerade in der Behandlung derartiger Aufgaben, wie man sie so leicht und mannichfaltig erfinden kann, zu üben, denn sie sind für die Fähigkeit zum Gebrauch der darstellend-geometrischen Methoden die besten Prüfungsmittel.

An dieser Stelle genügt es, wenn in dem Vorigen die zur Behandlung aller solchen Aufgaben dienende Methode ihre volle Erläuterung gefunden hat. Sie ist eine gemischte: Die projectivisch gegebenen Elemente werden in die Bildebene herabgeschlagen, um dort durch plane Constructionen die verlangten neuen Stücke zu finden und dieselben darnach in die ihnen zukommenden Lagen zurückzuführen.

Die Behandlung umfassenderer und den Anwendungen der darstellenden Geometrie scheinbar näher stehender Aufgaben würde nicht schwieriger sein. Als nützliche und leichte Uebungen in dieser Art sind die Darstellungen der regulären Körper zu bezeichnen. Wenn die Kantenlänge des Körpers, eine seiner Flächen, eine von den ihr angehörenden Ecken und die Richtung einer Kante, welche von dieser Ecke in der gegebenen Fläche ausgeht, bestimmt sind, so ist der Körper ohne Schwierigkeit nur mit Hülfe der im Vorhergehenden enthaltenen Constructionsmittel darstellbar. Man würde z. B. von einem Octaeder die Mittelebene, die Projection einer ihr angehörigen Kante, eine Ecke in derselben und die Kantenlänge als gegeben voraussetzen, dann zunächst diese Kante und Ecke mit der Mittelebene in die Bildebene herabschlagen, dort das Quadrat der Mittelfläche verzeichnen und die drei neuen Ecken desselben in die Ebene zurückschlagen; man errichtete alsdann im Durchschnittspunkt der Diagonalen dieses Quadrats auf seiner Ebene eine Normale und trüge auf dieselbe von der Ebene aus die Länge der halben Diagonale nach beiden Seiten auf, um die letzten beiden Octaederecken zu erhalten.

Das Nämliche ist für jedes andere nach Lage und Form bestimmte räumliche Gebilde ebenso ausführbar, wenn auch nach der grösseren Ecken- und Flächenzahl und nach der etwaigen geringern Regelmässigkeit desselben eine umständlichere Construction nöthig ist, als in dem gewählten Falle.

Durch Voraussetzung besonders einfacher und symmetrischer Lagen kann man die Darstellung der Proection wesentlich erleichtern.

Die bisher entwickelten Methoden sind auch ausreichend zur Construction aller der Aufgaben, welche über die Durchschnitte ebenflächiger Körper mit Ebenen und geraden Linien, sowie über die Durchdringungen von Körpern gestellt werden können; sie reichen ebenso hin, um allen für die Modellirung solcher Verbindungen nöthigen Anforderungen zu genügen.

In diesem Sinne umfassen die drei vorhergehenden Abschnitte das System der Mittel, durch welche jede bestimmte ebenflächige Raumgestalt der Darstellung und Behandlung nach der Methode der Centralprojection zugänglich gemacht wird. Es ist eine Sache der Uebung, sie ihrer vortheilhaftesten Verwendung entgegenzuführen, es bedarf jedoch dazu, nachdem diese Darstellungsmittel einzeln und in ihrem logischen Zusammenhange aufgefasst worden sind, nur einer verhältnissmässig geringen Anleitung.

16. Von der Veränderung des Projectionscentrums. Es ist von Werth, die Veränderungen zu untersuchen, welche die Projectionen unveränderlicher räumlicher Objecte erfahren, wenn das Centrum der Projection von einem Ort zum andern verlegt wird. Jede derartige Ortsveränderung kann aus zwei elementaren Bewegungen des Projectionscentrums zusammengesetzt werden, nämlich aus einer Bewegung des Projectionscentrums in der Gegenebene und einer Parallelverschiebung mit dieser Gegenebene selbst, bei welcher es jedoch in derselben Normale zur Bildebene bleibt. Bei jener Bewegung bleibt die Distanz unverändert und der Hauptpunkt vollzieht genau dieselbe Bewegung in der Bildebene, wie das Projectionscentrum in der Gegenebene; bei dieser Bewegung bleibt der Hauptpunkt ungeändert, aber die Distanz verändert sich um den Betrag der Parallelverschiebung der Gegenebene.

Man verfolgt die durch diese Ortsveränderungen des Centrums an den Projectionen unveränderlich gedachter Raumgebilde hervorgerufenen Modificationen, indem man sie an den projectivischen Bestimmungsstücken der Grundgebilde erörtert. Von diesen übertragen sie sich durch Zusammensetzung auf alle räumlichen Gebilde, welche durch Verbindungen derselben entstehen.

Sie lassen sich für diese Grundgebilde in den folgenden wenigen Sätzen aussprechen, in welchen vorausgesetzt wird, dass alle Punkte einer Fluchtlinie als Fluchtpunkte gerader Linien betrachtet werden, wie das aus den Grundvorstellungen der ganzen Methode und allen bisher gegebenen Entwickelungen derselben hervorgeht.

Die Durchgangspunkte gerader Linien und die Spuren von Ebenen bleiben bei allen Veränderungen des Projectionscentrums unverändert. Die Fluchtpunkte gerader Linien und die Fluchtlinien von Ebenen erfahren Veränderungen, welche von den Bewegungen des Projectionscentrums abhängen, wie folgt: Wenn das Projectionscentrum in der Gegenebene verschoben wird, so wird diese Verlegung durch die Veränderung des Hauptpunktes genau wiedergegeben und jeder Fluchtpunkt verschiebt sich um die nämliche Grösse wie der Hauptpunkt und in derselben Richtung.

Wenn das Projectionscentrum sich in der Senkrechten zur Bildebene oder der Hauptnormale bewegt, so ändert sich der Halbmesser des Distanzkreises, um den Betrag und in dem Sinne der Bewegung; der Hauptpunkt bleibt ungeändert und jeder Fluchtpunkt bewegt sich in der geraden Linie, welche ihn mit dem Hauptpunkte verbindet, um eine Länge, welche von dem ihm entsprechenden Neigungswinkel abhängt; sie ist die zweite Kathete eines rechtwinklichen Dreiecks, welches die Veränderung der Distanz zur ersten Kathete und diesen Neigungswinkel zu dem dieser letzteren gegenüberliegenden Winkel hat. Man findet die Lage des neuen Fluchtpunktes wenn man den gegebenen mit dem Hauptpunkt verbindet und eine Senkrechte auf dieser Geraden in dem letztern bis zum Durchschnitt mit dem alten und neuen Distanzkreis verzeichnet: der neue Fluchtpunkt liegt auf der von diesem letzteren Schnittpunkt aus zur Verbindungslinie des ersten mit dem alten Fluchtpunkt gezogenen Parallelen.

Diese Grundsätze reichen völlig aus, um von der Perspective eines beliebigen Raumgebildes für ein bestimmtes Projectionscentrum zu der Perspective desselben für ein anderes willkürlich festgesetztes Projectionscentrum überzugehen.

Es braucht nur angedeutet zu werden, dass Verrückungen und Drehungen der zu projicirenden Raumgebilde selbst stets auf entsprechende Veränderungen des Projectionscentrums reducirt und durch diese ersetzt werden können.

17. Specielle Bestimmungssysteme. Unter den mancherlei Mitteln, durch welche man Raumformen nach Zahl und Maass bestimmen kann, ist die Methode der Coordinaten, welche als bekannt vorausgesetzt werden darf, vorzugsweise systematisch und auf alle möglichen Raumformen, wenn auch nicht mit gleichbleibendem Vortheil, anwendbar; sie verdient daher besondere Aufmerksamkeit. Man benutzt natürlich die Tafel als die eine Coordinatenebene und es ist ganz gerechtfertigt, bei der Festsetzung einer zu ihr normalen zweiten Coordinatenebene, d. i. bei der Wahl einer Coordinatenachse in ihr, darauf zu achten, dass alle Punkte der darzustellenden Raumform auf derselben Seite dieser Ebene liegen, so wie dass dieselbe, wenn möglich mit einer natürlich bestimmten Ebene, wie z. B. mit der Horizontalebene, von gleicher Lage ist. Alsdann geschieht die Vervollständigung des Coordinatensystems durch die Festsetzung des Coordinatenanfangspunktes in dieser Achse.

Jeder Punkt im Raume ist in Bezug auf dies System durch seine drei senkrechten Abstände von den Coordinatenebenen bestimmt und das natürlichste Mittel, diese Bestimmung graphisch wiederzugeben, ist die Auftragung der Parallelprojectionen der betrachteten Raumform unter der Voraussetzung, dass die Projectionsebenen mit den Coordinatenebenen zusammenfallen.

Nennt man die in der Bildebene entstehende Projection den Aufriss, und von den beiden in den zu ihr normalen Coordinatenebenen erzeugten Projectionen die eine den Grundriss, die andere den Seitenriss, so liefert die Methode der Coordinaten gleichmässig drei verschiedene Bestimmungssysteme, die man deutlich genug bezeichnet, indem man sie unterscheidet als die Bestimmung durch Aufriss und Breite, die durch Grundriss und Höhe und die durch Seitenriss und Länge.

Alle drei haben als Grundlage einer Centralprojection das Gemeinsame, dass sie die perspectivische Darstellung eines gewissen vollständig bekannten ebenen Systems, die Errichtung von Perpendikeln in den einzelnen Punkten desselben auf seiner Ebene und das Abtragen gewisser Längen von diesen Punkten aus auf diese Senkrechten erfordern, um die Centralprojection des Raumgebildes vollständig zu erlangen.

Diesen Erfordernissen bringen die Bestimmungsmethoden aus dem Grundriss und dem Seitenriss vollkommen dieselben Hilfsquellen und Vortheile entgegen, nur die Lage der Hilfsconstruction ist bei beiden eine verschiedene. Bei beiden ist das darzustellende ebene System in einer zur Bildebene normalen Lage und in Folge dessen gehen die Constructionsvortheile der Zurückschlagung in solche Normalebenen auf sie über. Die Spur und die Fluchtlinie dieser Ebene werden zu Hauptlinien und die der letzteren angehörigen Punkte des Distanzkreises zu Hauptpunkten der Construction. Die in den Punkten des ebenen Systems auf seiner Ebene zu errichtenden Perpendikel projiciren sich, da sie zugleich der Bildebene parallel laufen, als zu jenen Hauptlinien senkrechte Parallelen. Die Auftragung der ihnen entsprechenden Längen ist daher durch eine sehr einfache in beiden Bestimmungsfällen wesentlich gleiche Construction zu vollziehen.

Die Bestimmung aus dem Aufriss und der Breite hat den wesentlichen Vorzug, dass ein Zurückschlagen des ebenen Systems hier nicht nöthig ist, weil es der Bildebene selbst angehört. Die Perpendikel, in welchen von der Bildebene weg die Breiten gemessen sind, projiciren sich als Strahlen eines Büschels, welches den Hauptpunkt zum Scheitel hat und die Auftragung ihrer Längen vollzieht sich ebenfalls sehr einfach.

Kein Zweifel, dass es nützlich ist, sich in dem Gebrauch dieser Bestimmungssysteme besondere Uebung zu verschaffen, weil gerade sie in der praktischen Anwendung der Darstellungsmethoden sich oft mit besonderer Bequemlichkeit darbieten; aber man muss sie da, wo es sich um eine geometrische, nicht blos dem Auge angenehme und naturtreu erscheinende, sondern eine zur Bestimmung der Objecte brauchbare Darstellung handelt, als specielle Fälle der allgemeinen Construction begreifen.

Zweiter Abschnitt.

Von den krummen Oberflächen, insbesondere den Regelflächen.

18. Zwei Gattungen krummer Oberflächen. Wenn man die Oberflächen als durch die Bewegung von Linien erzeugt ansieht, so entspringt die unendliche Mannichfaltigkeit derselben gleichmässig aus der unbegrenzten Mannichfaltigkeit der erzeugenden Linien und der der Bewegungen, welche ihnen beigelegt werden können. Weder diese noch jene kann in dem System der darstellenden Geometrie erschöpft werden. Man erlangt aber eine in gewissem Sinne vollständige systematische Vertretung dieser Erzeugungsweise der Oberflächen, wenn man zwei Klassen einer näheren Untersuchung unterwirft: die eine, wo man die ganze Mannichfaltigkeit der Bewegungen mit der Wahl einer ganz speciellen erzeugenden Linie, der geraden Linie, verbindet; die andere, wo man eine specielle Art der Bewegung, nämlich die Umdrehung um eine Achse mit allen möglichen Erzeugenden ausgeführt denkt. Jener Annahme entspringen die Regelflächen, dieser die Umdrehungsflächen.

Die darstellende Geometrie pflegt ausser diesen beiden grossen, gewissermassen typischen Abtheilungen nur noch die Oberflächen zweiten Grades zu behandeln, welche zum Theil überdies der Abtheilung der Regelflächen und zum andern Theil wenigstens in gewissen speciellen Fällen der Abtheilung der Umdrehungsflächen angehören.

Nur die Regelflächen sollen hier einer Untersuchung unterworfen werden, um ihre Darstellungs- und Behandlungsweise nach der Methode der Centralprojection zu entwickeln.

19. Eintheilung der Regelflächen. Eine Eintheilung der Regelflächen erfordert die Aufzählung aller der Modalitäten, in welchen die Bewegung einer geraden Linie nach mathematischen Gesetzen bedingt werden kann.

Man erhält dieselbe etwa in folgender Weise: Für die Bewegung einer geraden Linie können im Wesentlichen drei verschiedene Bedingungen aufgestellt werden, nämlich, dass sie bei der Bewegung immer durch einen festen Punkt gehen, dass sie immer eine feste gerade Linie, oder stets eine feste Curve schneiden soll. Bedingungen anderer Art, wie z. B. dass sie stets eine feste krumme Oberfläche berühren, oder dass sie mit einer festen Ebene stets einen vorgeschriebenen Winkel bilden soll, lassen sich auf die angegebenen drei Bedingungen zurückführen. Jeder Combination unter diesen Bedingungen, welche die Bewegung der erzeugenden Geraden zu einer bestimmten, nur in einer einzigen Weise ausführbaren macht, entspringt eine Klasse von Regelflächen.

Die einfachste aller Regelflächen ist die Ebene; sie geht aus der Anforderung hervor, dass die erzeugende gerade Linie stets durch einen festen Punkt gehen und eine feste gerade Linie schneiden soll. Dabei darf der feste Punkt in unendlicher Entfernung, d. h. als Richtung gedacht werden.

Wenn unter Beibehaltung der Drehung um einen festen Punkt die gerade Linie sich so bewegt, dass sie eine feste Curve fortwährend schneidet, so entspringt daraus die Klasse der Kegelflächen und in dem speciellen Falle, in welchem jener feste Punkt in unendlicher Entfernung oder als Richtung gegeben ist, die Klasse der Cylinderflächen.

Weil man einen Punkt als den Durchschnittspunkt zweier Linien ansehen kann, so ist die Vorschrift, dass die erzeugende Gerade stets durch einen festen Punkt gehen soll, ein specieller Fall der allgemeineren Bestimmung, dass sie stets zwei Linien schneiden soll, welche im Allgemeinen keinen gemeinschaftlichen Punkt haben. Diese Linien können, ebenso wie die schon vorher eingeführte Leitlinie, gerade oder krumme Linien sein und es kann im Allgemeinen eine von ihnen in unendlicher Entfernung liegend gedacht werden.

In diesem letzteren Falle vollzieht man ihre geometrische Bestimmung in folgender Art: Eine unendlich entfernte gerade Linie wird durch eine Ebene gegeben, in der sie liegen soll; sie ist die Durchschnittslinie dieser Ebene mit den ihr parallelen Ebenen. Die Erzeugende muss dann bei ihrer Bewegung dieser Ebene fortwährend parallel bleiben, d. h. ihr Fluchtpunkt muss beständig in der Fluchtlinie derselben sein. Eine unendlich entfernte Curve wird durch eine Kegelfläche bestimmt, auf welcher sie liegt; sie ist ein Zweig der Durchschnittscurven dieser Kegelfläche mit allen denjenigen andern Kegelflächen, welche ihr parallel sind, d. h. unter deren Erzeugenden für jede Erzeugende der gegebenen Kegelfläche eine Parallele — und nur eine — sich findet. Demgemäss ist die Fluchtlinie dieser Kegelfläche der Ort für die Fluchtpunkte der Erzeugenden, d. h. die Fluchtlinie der erzeugten Oberfläche selbst. Darnach erhält man die folgenden Abtheilungen von Regelflächen, als diejenigen, welche aus der Bedingung hervorgehen, dass die erzeugende Gerade drei beliebig im Raume gelegene Linien fortwährend durchschneide:

1.) Regelflächen, deren Erzeugende drei feste gerade Linien fortwährend durchschneidet; mit dem speciellen Fall, wo eine dieser Geraden in unendlicher Entfernung liegt, wo also die Bewegung der Erzeugenden durch die Forderung des steten Durchschnitts mit zwei festen Geraden und des Parallelismus mit einer festen Ebene bestimmt wird.

2.) Regelflächen, deren Erzeugende zwei feste gerade Linien und eine feste Curve fortwährend durchschneiden muss; mit den beiden speciellen Fällen, wo eine dieser Geraden oder diese Curve in unendlicher Entfernung liegt, wo also Parallelismus mit einer festen Ebene oder einer festen Kegelfläche vorgeschrieben ist.

3.) Regelflächen, deren Erzeugende zwei feste Curven und eine feste gerade Linie in jeder ihrer Lagen durchschneiden muss; mit den beiden speciellen Fällen, wo eine dieser Curven oder diese gerade Linie in unendlicher Entfernung vorausgesetzt wird.

4) Regelflächen, deren Erzeugende drei feste Curven fortwährend durchschneidet; mit dem speciellen Falle, dass eine dieser Curven in unendlicher Entfernung liegt.*)

Die erste dieser Klassen, welche zugleich für alle andern typisch ist, liefert im allgemeinen Falle die Oberfläche, welche man das elliptische einfache Hyperboloid nennt und in dem angeführten speciellen Falle das hyperbolische Paraboloid.

Für die andern Abtheilungen Benennungen einzuführen ist wegen der, durch die unter den Leitlinien auftretenden Curven, in ihnen umschlossenen unbegrenzten Mannichfaltigkeit unthunlich und der Mangel derselben ohne Nachtheil. Genug, wenn man auch für sie das geometrische Gesetz ihrer Erzeugung graphisch verfolgen und ihre Beziehungen zu andern Raumformen durch die darstellend-geometrische Methode untersuchen kann. Alsdann genügen für die nähere Untersuchung einzelne Beispiele, wie die Schraubenflächen, die sogenannten Conoide u. dgl.

20. Gang der Untersuchung. Die Untersuchung beginnt mit der graphischen Darstellung der Erzeugungsweise und der Ableitung beliebiger Lagen der Erzeugenden und beliebiger Punkte der krummen Oberfläche aus derselben. Alsdann sind die Beziehungen der Oberfläche zu andern Raumformen darzustellen; für dieselben wird ein im Wesentlichen combinatorischer Entwickelungsgang inne gehalten, so dass jede der Untersuchung unterworfene neue Klasse von Oberflächen nacheinander mit der geraden Linie, der Ebene, mit allen schon früher untersuchten Oberflächen anderer Abtheilungen und endlich mit solchen ihrer eignen Art in diejenigen geometrischen Beziehungen gesetzt wird, welche man zu untersuchen gedenkt.

Eine derartige Vertheilung des Stoffes, wie sie in dem Abschnitt von den ebenflächigen Raumformen gewählt worden ist, eine Vertheilung, bei welcher die Rücksicht auf die Ableitung einer geometrischen Bestimmung des Dargestellten aus der Zeichnung und die einer richtigen Zeichnung aus der geometrischen Bestimmung des Objects den Hauptgesichtspunkt bildete, ist bei der Behandlung der krummen Oberflächen nach der Natur der Sache weder möglich noch nöthig; denn alle Bestimmungsstücke können, weil sie, der Natur ihres Zweckes nach, sich in ebener Tafel getreu wiedergeben lassen müssen, nur ebene Elemente sein und für ihre Darstellung und die mit ihnen vorzunehmenden constructiven Operationen ist durch jene Entwickelung bei den ebenflächigen Formen ein- für allemal gesorgt. Die Brauchbarkeit und der Gebrauch der dort entwickelten Methoden auch bei allen krummen Oberflächen bedarf keiner besondern Erläuterung.

I. Die Kegel- und Cylinderflächen.

21. Darstellungsweise. Aus der geometrischen Bestimmung einer Kegel- oder Cylinderfläche, welche durch die Festsetzung der Leitcurve und der Spitze oder der sie vertretenden Richtung der Erzeugenden geschieht, muss die projectivische Bestimmung derselben hervorgehen. Für dieselbe ist somit die projectivische Darstellung der Spitze und der Leitcurve nöthig. Weil jedoch die Darstellung einer doppeltgekrümmten Curve die Vermittelung von Kegel- oder Cylinderflächen erfordert, so dass von derselben erst nach oder neben diesen gesprochen werden kann, so wird zuerst eine ebene Leitcurve vorausgesetzt und dieselbe als durch ihre Projection und die Spur und Fluchtlinie ihrer Ebene projectivisch bestimmt angesehen. Jeder ebene Schnitt der Fläche, welcher nicht durch die Spitze gelegt ist, kann als solche Leitcurve dienen und es ist somit statthaft, diejenige unter allen zu wählen, welche am einfachsten darstellbar ist, nämlich die Durchschnittslinie der Fläche mit der Bildebene. Sie wird in dem Folgenden als die Spur der Fläche bezeichnet werden.

Aus einer in der vorher angegebenen Weise bestimmten Leitcurve und der Spitze lässt sich die Spur ohne Schwierigkeit ableiten; denn jedem Punkte der Leitcurve entspricht eine Erzeugende der Fläche, nämlich

*) Wenn zwei der Leitlinien in unendlicher Entfernung vorausgesetzt werden, so erhält man Oberflächen mit einer Leitlinie und einer Spitze oder mehreren Spitzen in unendlicher Entfernung; es entspringen daraus Ebenen, Cylinder, Büschel von Ebenen und Büschel von Cylindern.

der geraden Linie, die ihn mit der Spitze verbindet und der Durchgangspunkt derselben, den man nach dem Früheren bestimmen kann, gehört der Spur der Fläche an.

Auch die Fluchtpunkte der Erzeugenden bilden in ihrer stetigen Aufeinanderfolge eine Curve, welche als die Fluchtlinie der Kegelfläche bezeichnet werden mag. Sie kann als die Spur einer andern Kegelfläche angesehen werden, welche das Projectionscentrum zur Spitze hat und deren Erzeugende denen der gegebenen Kegelfläche einzeln parallel sind.

Man darf die Fläche als durch die Spur, eine Erzeugende und die in ihr enthaltene Spitze bestimmt voraussetzen; die Fluchtlinie ergiebt sich daraus als der Ort der Fluchtpunkte aller Erzeugenden und man erkennt, dass Spur und Fluchtlinie derselben Kegelfläche ähnliche Curven in ähnlicher Lage sind, welche die Projection der Spitze zum Aehnlichkeitspunkt haben.

Demnach würde die Angabe der Fluchtlinie, einer Erzeugenden und der Spitze in ihr ebenso zur Bestimmung der Kegelfläche ausreichen.

Von der Lage, welche die Projection der Spitze gegen den Flucht- und Durchgangspunkt der gegebenen und somit aller Erzeugenden hat, hängt nach dem Früheren die Lage der Spitze im Raume ab: Die Spitze liegt hinter der Bildebene, so lange ihr Bild zwischen diesen beiden Punkten enthalten ist, und zwar speciell vor, in oder hinter der Parallelebene, je nachdem ihr Bild in der den Durchgangspunkt enthaltenden Hälfte dieser Strecke, in der Mitte derselben oder in der dem Fluchtpunkte benachbarten Hälfte liegt; sie liegt in der Bildebene, wenn ihr Bild mit dem Durchgangspunkt der Erzeugenden zusammenfällt und dann ist zur Bestimmung der Kegelfläche die vollständige Angabe der Fluchtlinie unerlässlich, weil die Spur sich auf einen Punkt oder ein Strahlenbüschel reducirt und die Spitze selbst enthält; sie liegt vor der Bildebene, wenn ihr Bild jenseits der bezeichneten Strecke liegt und zwar hinter oder vor der Gegenebene, je nachdem es in der Verlängerung jenseits des Durchgangspunktes oder jenseits des Fluchtpunktes gelegen ist, endlich aber in der Gegenebene selbst, wenn ihr Bild in unendlicher Entfernung liegt und in unendlicher Entfernung, wenn ihr Bild mit dem Fluchtpunkt der Erzeugenden zusammenfällt.

In diesem letztgenannten Falle reducirt sich die Fluchtlinie der Fläche auf einen Punkt, und die Spur muss demnach ganz gegeben sein, damit die Fläche bestimmt sei; sie ist eine Cylinderfläche, für welche die Richtung der Erzeugenden durch diesen Fluchtpunkt angegeben ist.

So erscheint auch in der centralprojectivischen Darstellung jede Cylinderfläche nur als ein specieller Fall einer Kegelfläche und es wird deshalb im Folgenden nur selten von den Cylinderflächen insbesondere gesprochen werden; Alles, was von den Kegelflächen gilt, überträgt sich ohne Weiteres auf dieselben.

Man sieht, dass in der Darstellung der Kegelflächen die Aehnlichkeit und ähnliche Lage zweier Curven eine wichtige Rolle spielt; in der That kommen, wenn man die Cylinderflächen einschliesst, alle möglichen Fälle dieser gegenseitigen Beziehung zweier Curven zum Ausdruck.

Dieser Darstellungsweise entziehen sich nur diejenigen Cylinderflächen, deren Erzeugende der Bildebene parallel laufen, weil die Spur solcher Cylinderflächen, auch wenn eine solche existirt, nicht als Leitcurve angesehen werden kann und überdies der Fluchtpunkt der Erzeugenden unendlich entfernt liegt. Solche Cylinderflächen müssen durch den Durchschnitt mit einer durch ihre Spur und ihre Fluchtlinie bestimmten Ebene und die Projection ihrer Erzeugenden dargestellt werden.

22. Punkte und Erzeugende der Kegelfläche. Die Fläche wird im Folgenden überall als projectivisch bestimmt vorausgesetzt, so dass die Spitze und sowohl die Spur als die Fluchtlinie als vollständig bekannt anzusehen sind.

Jeder Punkt in der Bildebene entspricht einem Punkte oder mehreren Punkten der Kegelfläche, sobald die gerade Linie, welche ihn mit der Spitze derselben verbindet, ihrer Spur und Fluchtlinie in reellen Punkten begegnet; jeder ihrer Schnittpunkte mit der Spur ist Durchgangspunkt und der ihm nach der Aehnlichkeit beider Curven entsprechende in der Fluchtlinie Fluchtpunkt einer Erzeugenden der Kegelfläche, welche von der projicirenden Linie jenes Punktes geschnitten wird. Der Schnittpunkt ist einer der Punkte der Kegelfläche, welche in jenem Punkte projicirt sind, und die Anzahl derselben ist so gross, wie die Zahl der Durchschnittspunkte der Spur oder der Fluchtlinie der Fläche mit der geraden Linie, welche den gedachten Punkt mit der Spitze verbindet.

Man sieht daraus, dass das Bild einer Kegelfläche die ganze Bildebene bedecken muss, wenn die Projection der Spitze von der Spur der Kegelfläche umschlossen ist, dass sie sich aber im andern Falle auf einen nach zwei Seiten offenen unbegrenzten Winkelraum beschränkt, welchen die von der Spitze aus gezogenen äussersten Erzeugenden einschliessen.

Die Lage, welche das Bild eines Punktes in der ihm zugehörigen Erzeugenden gegen den Flucht- und Durchgangspunkt derselben hat, bestimmt die Lage des Punktes im Raume gegen das System der drei parallelen Ebenen, welche als Parallelebene, Bildebene und Gegenebene bezeichnet worden sind, ganz ebenso, wie dies im vorigen Artikel hinsichtlich der Spitze angegeben ward.

Wenn man in allen Erzeugenden die Halbirungspunkte der zwischen Durchgangs- und Fluchtpunkt enthaltenen Strecken bezeichnet, so bilden dieselben eine Curve, welche die Durchschnittslinie der Oberfläche mit der Parallelebene ist und deren Aehnlichkeit und ähnliche Lage mit der Fluchtlinie und Spur derselben in vielen Fällen von Nutzen sein kann.

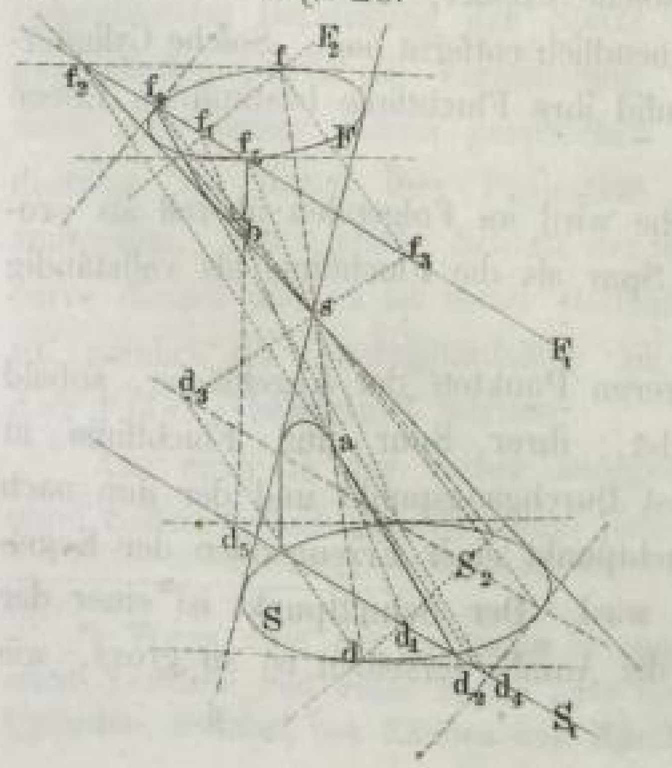
23. Durchschnitte der Kegelflächen mit Ebenen und mit geraden Linien. Eine Kegelfläche kann von einer Ebene entweder nur in einem Punkte, der Spitze, oder in einer oder mehreren Erzeugenden, oder endlich in einer Curve geschnitten werden; eine Cylinderfläche wird entweder in geradlinigen Erzeugenden oder in einer Curve geschnitten, und eine Ebene, die ihren Fluchtpunkt enthält, ohne ihre Spur zu schneiden, hat keinen endlichen Punkt mit ihr gemein.

Jener einfachste Schnitt dieser Flächen nach geraden Linien, von welchem der punktförmige nur ein specieller Fall ist, wird erhalten, wenn die Schnittebene die Spitze oder die Richtung der Erzeugenden in sich enthält und ihre Spur die Spur der Kegel- oder Cylinderfläche durchschneidet. Die Punkte, in welchen dieses Letztere geschieht, sind die Durchgangspunkte der der Oberfläche und der Ebene gemeinsamen Erzeugenden und die zu ihnen homologen Punkte der Fluchtlinie des Kegels, in welcher diese von der Fluchtlinie der Ebene geschnitten wird, sind ihre Fluchtpunkte.

Spur und Fluchtlinie einer solchen Schnittebene sind ein Paar entsprechende Gerade in den beiden ähnlichen und ähnlich liegenden Systemen, welche von der Spur und der Fluchtlinie der Kegelfläche gebildet werden.

Dies reicht hin, um die Durchschnittspunkte einer geraden Linie mit einer Kegel- oder Cylinderfläche zu bestimmen. Man legt durch die gerade Linie und die Spitze der Kegelfläche oder parallel den Erzeugenden der Cylinderfläche eine Ebene, bestimmt die Erzeugenden, in welchen diese die Oberfläche schneidet, und die Punkte, welche diese letzteren mit der geraden Linie gemein haben: sie sind die gesuchten Schnittpunkte. Ihre Zahl kann höchstens ebenso gross sein als die Zahl der Durchschnittspunkte, welche eine gerade Linie mit der Fluchtlinie oder Spur der Fläche gemeinsam haben kann.

Fig. 20.

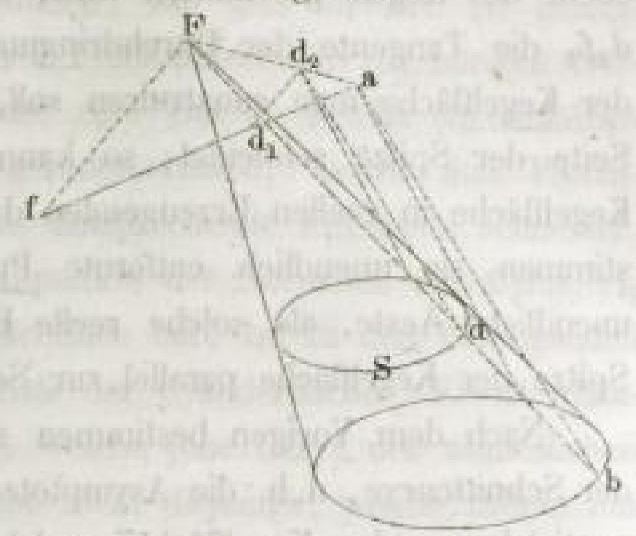


Mit denselben Mitteln lässt sich auch die Durchschnittscurve einer Kegel- oder Cylinderfläche mit einer Ebene, welche ihre Spitze nicht enthält, construiren. Man legt durch die Kegelspitze eine Reihe von Hilfsebenen, welche die Kegelfläche in geraden Linien durchschneiden und bestimmt die Punkte, in denen dieselben die Schnittebene treffen; sie liegen in der Durchschnittslinie der gewählten Hilfsebene mit der Schnittebene.

Für die Figur (Fig. 20) sind die Hilfsebenen so gelegt, dass ihre Spuren sämmtlich einander parallel laufen, d. h. sie gehen alle durch eine gerade Linie, welche von der Spitze aus in der durch die Projection bestimmten Richtung zur Bildebene parallel gezogen wird. In ihr sind F, S Spur und Fluchtlinie, f, d Fluchtpunkt und Durchgangspunkt einer Erzeugenden, s die Spitze, F_1, S_1 ist die Schnittebene, F_2, S_2 eine der Hilfsebenen und a, b die ihr entsprechenden Punkte der Durchdringungscurve. Für die Cylinderfläche vereinfacht sich die Construction noch wesentlich.

Unter den speciellen Fällen dieser Construction verdient derjenige Erwähnung, in welchem die Schnittebene der Bildebene parallel ist und somit durch einen in ihr liegenden Punkt bestimmt wird. Eine Cylinderfläche sei durch ihren Fluchtpunkt F und ihre Spur S gegeben (Fig. 21), der die Schnittebene bestimmende Punkt sei a in der Gerade $d_1 f_1$; um die Durchschnittscurve dieser Ebene mit der Cylinderfläche zu bestimmen hat man für die Erzeugenden der letzteren in der nämlichen Art zu verfahren, in welcher früher der Durchschnittspunkt einer geraden Linie mit einer solchen der Bildebene parallelen Ebene gefunden ward. Man zieht a F und bestimmt d_2 durch d_1 d_2 parallel F; ist dann d der Durchgangspunkt einer Erzeugenden, so findet man den ihr angehörigen Punkt der Durchschnittscurve, indem man d mit d_2 verbindet und durch a zu dieser Linie eine Parallele zieht; diese bestimmt auf der Erzeugenden den Punkt b, welcher dieser Curve angehört. Diese Curve ist der Spur und Fluchtlinie der Kegelfläche ähnlich und mit beiden in ähnlicher Lage. Es ist ein specieller Fall dieser Construction, wenn man die Durchschnittslinie der Parallelebene mit der Kegelfläche zu bestimmen verlangt. Weil dann der Punkt a die Mitte der Strecke $d_1 f_1$ in seiner Geraden bezeichnet, so liegen auch alle Punkte der Schnittcurve in der Mitte zwischen Durchgangs- und Fluchtpunkt ihrer Erzeugenden.

Fig. 21.



Es ist bemerkenswerth, dass man in jeder der Constructionen dieses Artikels, ohne dieselbe irgendwie zu verändern, die Spur und die Fluchtlinie der Kegelfläche vertauschen kann, wenn man gleichzeitig Spuren und Fluchtlinien aller in ihr vorkommenden Ebenen und Durchgangs- und Fluchtpunkt aller in ihr auftretenden geraden Linien vertauscht. Natürlich stellt die Projection nach dieser Vertauschung eine ganz andere Kegelfläche und eine andere Ebene z. B. dar, aber die Projection der Durchschnittslinie bleibt dieselbe.

Durch dieselben zwei ähnlichen und ähnlich gelegenen Curven und ihren Aehnlichkeitspunkt werden zwei verschiedene Kegelflächen dargestellt, von denen die eine die Spur der andern zur Fluchtlinie hat und umgekehrt. Man darf schon hier vermuthen und findet im Folgenden diesen Gedanken bestätigt, dass ihre Durchschnittscurve der Parallelebene angehöre.

Ueberall hat in den vorhergehenden Betrachtungen und Zeichnungen die Lage des Projectionscentrums ganz unbestimmt gelassen werden dürfen, so dass durch Feststellung dieser Lage aus jeder derselben viele specielle Fälle abgeleitet werden können. Mit jeder andern Feststellung des Centrums repräsentiren dieselben projectivischen Data andere Kegelflächen, andere Ebenen und Geraden, ohne dass das Bild der Durchschnittslinie und der Durchschnittspunkte geändert wird. *)

24. Tangentialebenen und Tangenten. Die Berührung einer Ebene mit einer Kegelfläche findet längs einer ganzen Erzeugenden statt. Jede in einer solchen Ebene gezogene gerade Linie berührt die Kegelfläche, weil sie diese der Ebene angehörige Erzeugende und somit die Kegelfläche nur in einem einzigen Punkte schneiden kann.

Daher sind die Spur und die Fluchtlinie einer solchen berührenden Ebene Tangenten der Spur und der Fluchtlinie der Kegelfläche in den Punkten, die zu der Erzeugenden, längs welcher die Berührung stattfindet, als Durchgangs- und Fluchtpunkt gehören.

Jede gerade Linie in dieser Ebene berührt die Kegelfläche in demjenigen Punkte, in welchem sie die Berührungsseite schneidet.

*) Darin spricht sich eine allgemeine geometrische Beziehung aus, welche für einen speciellen Fall angegeben werden mag. Für einen Cylinder zweiten Grades ist die Spur der Durchschnittsebene die imaginäre oder reelle Secante (Chordale) zwischen der Spur des Cylinders und der Projection der Durchschnittscurve.

Bei der Aufgabe des vorigen Artikels, oder bei der Construction der Durchschnittscurve einer Ebene mit einer Kegelfläche, ist es von Wichtigkeit, die Tangenten dieser Curve zu verzeichnen, weil man dadurch ihren Verlauf am genauesten bestimmen kann; man kann auch verlangen, dass eine solche Curve aus ihren Tangenten allein construirt werde, d. h. als Enveloppe derselben. Beides erreicht man durch die Bemerkung, dass die Tangente der Schnittcurve die gerade Linie ist, in welcher die Schnittebene von der Tangentialebene des Kegels geschnitten wird, die denselben längs der gewählten Erzeugenden berührt. In Fig. 20 ist d_2f_2 die Tangente der Durchdringungscurve im Punkte a. Wenn die Ebene, deren Durchschnittscurve mit der Kegelfläche man construiren soll, so liegt, dass sie nicht alle Erzeugende derselben auf der nämlichen Seite der Spitze schneidet, so kann man durch die Spitze eine zu ihr parallele Ebene legen, welche die Kegelfläche in reellen Erzeugenden durchschneidet. Da diese letzteren der Schnittebene parallel sind, so bestimmen sie unendlich entfernte Punkte der Durchschnittscurve. Dieselbe besitzt demnach ebenso viele unendliche Aeste, als solche reelle Erzeugenden durch die Ebene bestimmt werden, welche man durch die Spitze der Kegelfläche parallel zur Schnittebene legen kann.

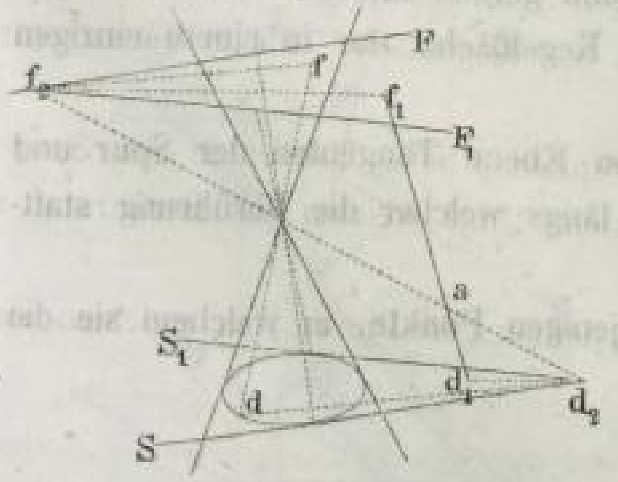
Nach dem Vorigen bestimmen sich die diesen unendlich entfernten Punkten entsprechenden Tangenten der Schnittcurve, d. h. die Asymptoten derselben, als die Durchschnittslinien der Schnittebene mit jenen Tangentialebenen der Kegelfläche, welche dieselbe längs der zur Schnittebene parallelen Erzeugenden berühren. Die in der Fig. 20 dargestellte Schnittcurve besitzt zwei unendliche Aeste und f_4d_4, f_5d_5 sind die denselben entsprechenden Asymptoten.

Wenn die Spur der Kegelfläche und somit auch die Fluchtlinie eine Curve vom zweiten Grade ist, so dass eine gerade Linie nur zwei Schnittpunkte mit ihr bestimmen kann, so folgt aus dem Früheren, dass alle ebenen Schnittcurven der Kegelfläche gleichfalls Curven zweiten Grades sind, und aus dem Letztvorhergehenden, dass dieselben entweder Curven ohne einen unendlich entfernten Punkt, also geschlossene Curven, oder Curven mit einem unendlich entfernten Punkt und einer Asymptote, oder endlich Curven mit zwei unendlich entfernten Punkten und zwei Asymptoten sein müssen, je nachdem die Fluchtlinie der Schnittebene die Fluchtcurve der Kegelfläche nicht trifft, berührt oder schneidet; auch ergiebt sich, dass die eine Asymptote, welche der Schnittcurve im zweiten Falle angehört, in unendlicher Entfernung liegen muss.

Aufgabe: Man soll die Tangentialebenen einer Kegelfläche construiren, welche durch einen gegebenen Punkt gehen.

Zur Bestimmung derselben führt die Bemerkung, dass diese Tangentialebenen die gerade Linie enthalten müssen, welche den gegebenen Punkt mit der Spitze der Kegelfläche verbindet; ihre Spuren sind demnach die Tangenten, welche man vom Durchgangspunkt dieser geraden Linie an die Spur der Kegelfläche zieht und die Fluchtlinien die zu jenen parallelen Tangenten der Fluchtlinie der Kegelfläche, welche vom Fluchtpunkt jener geraden Linie gezogen werden können.

Fig. 22.



Die entsprechenden Berührungsseiten der Kegelfläche haben die zusammengehörigen Berührungspunkte an diesen beiden Curven zu Flucht- und Durchgangspunkten. Die Fig. 22 stellt die durch den Punkt a in der Geraden d_1f_1 gehenden Tangentialebenen der gegebenen Kegelfläche dar; sie sind SF, S_1F_1. Die Aufgabe ist nicht lösbar, wenn keine solchen Tangenten gezogen werden können.

Wenn der gegebene Punkt in unendlicher Entfernung vorausgesetzt wird, so geht die Aufgabe in die folgende über: Man soll diejenigen Tangentialebenen einer Kegelfläche construiren, welche einer gegebenen geraden Linie parallel sind.

Der gegebene Punkt ist dann ein Fluchtpunkt und gehört den Fluchtlinien der gesuchten Berührungsebenen selbst an.

Die Construction vereinfacht sich ohne wesentliche Veränderung bei der Cylinderfläche dadurch, dass dann die Fluchtlinie sich auf einen Fluchtpunkt reducirt zeigt.

25. Normalen. Jede Senkrechte, welche in einem Punkte der Kegelfläche auf der durch ihr gehenden Tangentialebene errichtet wird, ist eine Normale derselben. Sie erfordert zu ihrer Construction die Einzeichnung des Distanzkreises, der in allen früheren Aufgaben entbehrlich war.

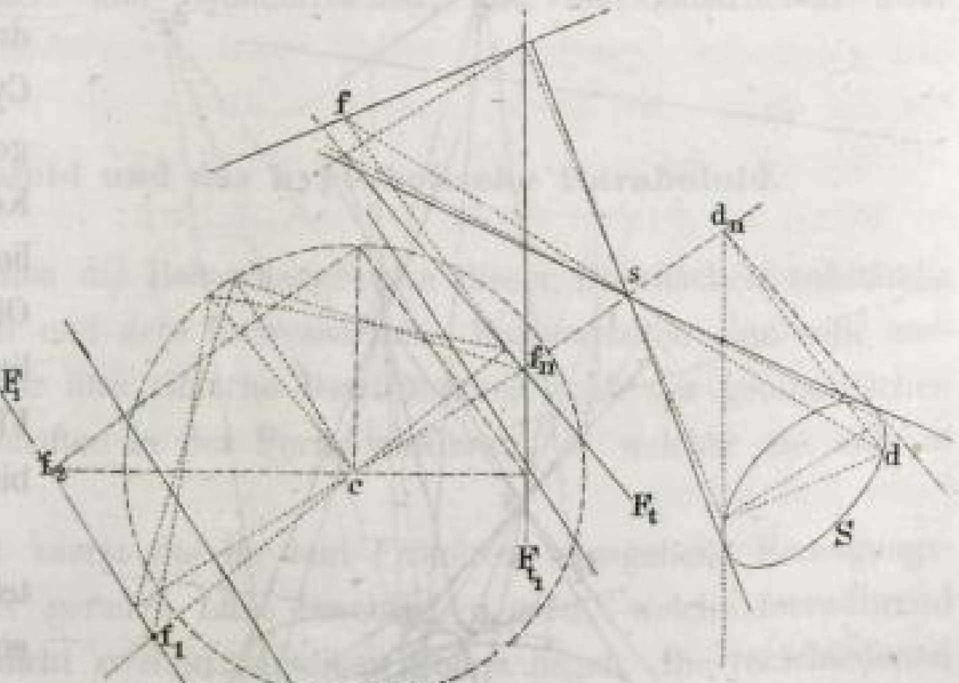
Alle Normalen, welche den Punkten der nämlichen Erzeugenden entsprechen, sind als Perpendikel zu derselben Ebene parallel und bilden eine Ebene; sie haben einen gemeinsamen Fluchtpunkt, und derselbe ist mit der Fluchtlinie der zugehörigen Berührungsebene in der Weise verbunden, wie dies im Art. 10 gezeigt worden ist. Jeder andern Erzeugenden des Kegels entspricht ein anderer Fluchtpunkt der zugehörigen Normalen und die Aufeinanderfolge dieser Punkte bildet für jede Kegelfläche eine Curve, welche ein einfaches geometrisches Gesetz mit der Fluchtcurve derselben verbindet. *) Alle geraden Linien, welche ihre Fluchtpunkte in dieser Curve haben, sind Normalen des Kegels, wenn sie die entsprechende Kegelseite schneiden.

Bei der Cylinderfläche geht diese Curve, der Ort sämmtlicher Fluchtpunkte der Normalen des Cylinders, in eine gerade Linie über; jede Ebene, welche diese Gerade zur Fluchtlinie hat, ist zu den Erzeugenden des Cylinders normal und enthält daher für jede derselben eine Normale der Cylinderfläche. Etwas Aehnliches existirt auch bei der Kegelfläche; man kann jede Kegelfläche, welche jene Curve der sämmtlichen Normalen-Fluchtpunkte der gegebenen Kegelfläche zur Fluchtlinie und vor allem diejenige, welche zudem mit dieser letzteren dieselbe Spitze hat, als eine Normalkegelfläche zu der gegebenen bezeichnen, weil sich zu jeder Erzeugenden der einen Kegelfläche unter den Erzeugenden der andern ihre Normale findet. Die Betrachtung derselben hat mehrfaches Interesse, hier kann sie jedoch nur angedeutet werden.

Aufgabe: Man soll diejenigen Normalen einer Kegelfläche construiren, welche einer bestimmten Ebene parallel sind.

Zur Auflösung dieser Aufgabe führt die Bemerkung, dass diejenigen Tangentialebenen, zu denen die gesuchten Normalen gehören, auf der Ebene senkrecht sein müssen, zu welcher die Normalen parallel sein sollen, dass sie somit alle den gemeinsamen Fluchtpunkt der Normalen dieser Ebene enthalten müssen. Wenn man also diesen Fluchtpunkt construirt und diejenigen Tangentialebenen der Kegelfläche angiebt, welche ihn enthalten, so entsprechen diese der gesuchten Normalen; jeder einzelnen Tangentialebene natürlich unendlich viele Normalen, welche einander parallel sind und somit einen gemeinsamen Fluchtpunkt besitzen. In Fig. 23 sind die Normalen der durch die Spur S und eine Erzeugende df mit der Spitze s gegebenen Kegelfläche construirt, welche zu den Ebenen von der gemeinsamen Fluchtlinie F_1 parallel sind; F_t, F_{t_1} sind die Fluchtlinien der ihnen entsprechenden Tangentialebenen, welche die gerade Linie $f_n\, d_n$, die den Normalen-Fluchtpunkte jener Ebene und die Spitze verbindet, enthalten. Daraus ergeben sich f_1 und f_2 als Fluchtpunkte der fraglichen Normalen und sie müssen in der Fluchtlinie F_1 enthalten sein.

Fig. 23.



Wenn man hier die Normalen indirect construirt, indem man die Aufgabe auf die Bestimmung gewisser einer gegebenen Richtung parallelen Tangentialebenen reducirt, so führt die Angabe der vorher erwähnten Curve der Flucht-

*) Wenn man bemerkt, dass der Fluchtpunkt der Normalen zu einer Ebene mit der Fluchtlinie derselben in einem Zusammenhange steht, welcher dem zwischen Pol und Polare sehr verwandt ist, dass er nämlich in der Senkrechten zu ihr vom Hauptpunkt ebenso weit jenseits des letztern liegt, wie der in Bezug auf den Distanzkreis genommene Pol der Fluchtlinie diesseits, so tritt die erwähnte Curve in die entsprechende nahe Beziehung zur Reciproken der Fluchtlinie des Kegels in Bezug auf den Distanzkreis; sie ist mit dieser symmetrisch im Verhältniss zum Hauptpunkt.

punkte aller Normalen direct auf die gesuchten Normalen selbst; denn ihre Fluchtpunkte müssen die Durchschnittspunkte dieser Curve mit der Fluchtlinie der Ebene sein, welcher sie nach der Aufgabe parallel sein sollen.

Aufgabe: Man soll diejenigen Normalen einer Kegelfläche construiren, welche durch einen gegebenen Punkt gehen.

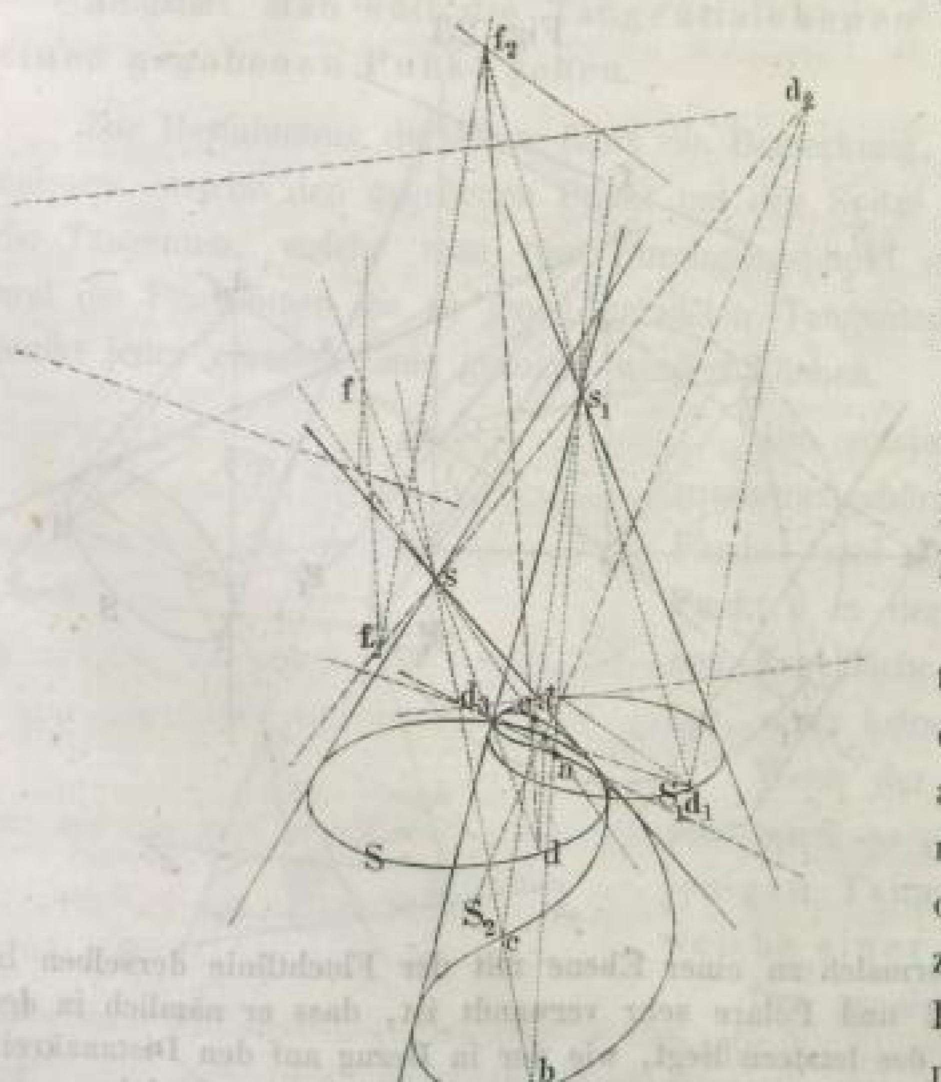
Man verbindet den gegebenen Punkt mit der Spitze der Kegelfläche, legt durch ihn zu dieser Verbindungslinie eine Normalebene und bestimmt die Curve, in welcher dieselbe die Kegelfläche schneidet; diese schlägt man mit ihrer Ebene und dem gegebenen Punkte in die Bildebene herab, um dort die Normalen dieser Curve zu verzeichnen, welche durch den gegebenen Punkt gehen. Die Fusspunkte derselben werden dann in die Curve zurückgeschlagen und bezeichnen diejenigen Kegelseiten, welchen die gesuchten Normalen entsprechen. Wenn man für diese Kegelseiten die Tangentialebenen construirt, und von dem gegebenen Punkte aus die Perpendikel auf dieselben fällt, so gehören die Fusspunkte derselben den bezeichneten Berührungsseiten an, zum Zeichen, dass diese Perpendikel die verlangten Normalen sind.

Die Kenntniss der früher erwähnten Curve vereinfacht auch diese Construction, denn sie führt direct zu den Fluchtpunkten der gesuchten Normalen; man bestimmt den Fluchtpunkt der geraden Linie, welche den gegebenen Punkt mit der Spitze des Kegels verbindet und construirt die Normalen jener Curve der Normalen-Fluchtpunkte, welche von ihm ausgehen: ihre Fusspunkte sind die Fluchtpunkte der gesuchten Normalen.

26. Durchdringung zweier Kegelflächen. Jede Durchdringungsfigur zweier krummen Oberflächen wird punktweise mittelst solcher Hilfsflächen construirt, deren Durchschnittslinien mit diesen Oberflächen selbst leicht zu construiren sind; jede solche Hilfsfläche liefert in den Durchschnittspunkten der ihr entsprechenden Durchschnittslinien mit beiden Oberflächen Punkte der Durchdringungsfigur.

Für die Durchdringungen von Kegelflächen dienen Ebenen, welche durch die beiden Spitzen derselben gelegt sind und welche somit beide Flächen in geraden Linien durchschneiden. Die Punkte, in welchen die in derselben Hilfsebene liegenden Erzeugenden sich durchschneiden, gehören der Durchdringungscurve an. Fig. 24 zeigt die Durchdringung zweier Kegelflächen, deren Spuren S, S_1 und Spitzen s, s_1 in den resp. Erzeugenden df, d_1f_1 sind; d_2f_2 ist die Verbindungslinie der Spitzen, F_2 die Spur einer der Hilfsebenen, und a, b, c, e sind die entsprechenden Punkte der Durchdringungscurve. Ist die eine der Oberflächen eine Cylinderfläche, so hat man die Hilfsebenen durch die gerade Linie zu legen, welche von der Spitze der Kegelfläche aus parallel zu den Erzeugenden der Cylinderfläche gezogen werden kann; sind endlich beide Oberflächen Cylinder, so ist die gemeinschaftliche Fluchtlinie aller Hilfsebenen die gerade Linie, welche die Fluchtpunkte beider Cylinderflächen mit einander verbindet.

Fig. 24.



Man kann die Durchdringungscurve auch vermittelst ihrer Tangenten construiren und für jeden Punkt einer solchen Curve die zugehörige Tangente derselben angeben. Beides wird durch sehr einfache Constructionen nach dem geometrischen Satze geleistet: Die Tangente der Durchschnittscurve ist die Durchschnittslinie der zwei Tangentialebenen, welche in dem betreffenden Punkte an die beiden Kegelflächen gelegt werden können. In der Figur ist d_3a die Tangente der Durchdringungscurve im Punkte a.

Soll eine solche Durchdringungscurve unendliche

Aeste und somit Asymptoten besitzen, so müssen unter den geraden Erzeugenden beider Flächen, durch deren Durchschnitt die Punkte der bezeichneten Curve enthalten werden, Paare von Parallelen sein, d. h. die Fluchtlinien beider Oberflächen müssen reelle Durchschnittspunkte besitzen. Wenn man für ein solches Paar parallele Erzeugende der beiden Kegelflächen die Berührungsebenen der letzteren construirt, so ist die Durchschnittslinie derselben die Tangente der Curve in dem ihnen entsprechenden unendlich entfernten Durchschnittspunkt oder eine Asymptote derselben.

Einige specielle Fälle dieser Constructionen sind erwähnenswerth. Kegelflächen von gemeinschaftlicher Spitze können sich nach ihnen nur in geradlinigen Erzeugenden durchschneiden, nämlich in denjenigen, welche die Durchschnittspunkte der Spuren zu Durchgangspunkten und die Durchschnittspunkte der Fluchtlinien zu Fluchtpunkten haben. Dasselbe findet bei zwei Cylinderflächen statt, wenn ihre Fluchtpunkte sich decken; es kann aber niemals für eine Kegelfläche und eine Cylinderfläche eintreten.

Wenn in einer solchen Durchdringungsconstruction bei beiden Kegelflächen Fluchtlinie und Spur gleichzeitig vertauscht werden, so bleibt, obgleich nun ganz andere Kegelflächen dargestellt sind, die Centralprojection der Durchdringungscurve doch vollkommen ungeändert.

Zwei Kegelflächen, von denen die eine die Spur der andern zur Fluchtlinie und die Fluchtlinie der andern zur Spur hat, und deren Spitzen sich in demselben Punkte projiciren, schneiden sich in einer der Parallelebene angehörigen Curve.

Es soll hier nur angedeutet werden, wie mit den bisher entwickelten Hilfsmitteln auch andere Aufgaben über die Kegel- und Cylinderflächen aufgelöst werden können, z. B. die Construction paralleler Tangentialebenen an zwei Kegelflächen, die Construction paralleler Normalen derselben u. s. w.

27. Räumliche Curven. Jede doppeltgekrümmte Curve kann als Durchschnittslinie zweier Kegelflächen betrachtet und als solche projicirt werden; man darf dabei voraussetzen, dass die eine der beiden Kegelflächen das Projectionscentrum zur Spitze hat, so dass die Projection der Curve Spur und Fluchtlinie derselben zugleich darstellt. Dann ist eine räumliche Curve durch ihre Projection und eine Kegelfläche, auf welcher sie liegt, oder als deren Leitcurve sie betrachtet werden kann, bestimmt. Diese Darstellungsweise erlaubt, alle wesentlichen Probleme über die räumlichen Curven und ihre Beziehungen zu andern Raumformen bequem zu lösen; sie gestattet z. B., was hier zunächst zu fordern ist, die Bestimmung des Durchschnitts solcher Curven mit Ebenen, mit Kegel- und Cylinderflächen, und die Construction ihrer Tangenten.

III. **Das elliptische einfache Hyperboloid und das hyperbolische Paraboloid.**

28. Es wird nicht beabsichtigt, in dem Folgenden die Behandlungsweise dieser Oberflächen vollständig zu entwickeln, denn dies würde bei dem Reichthum und dem Interesse ihrer Eigenschaften eine sehr ausführliche Behandlung erfordern; man will vielmehr nur ihre einfache Darstellbarkeit nach der geometrischen Definition zeigen und einige ihrer wichtigsten Eigenschaften in der Form vorführen, in welcher sie sich in der Centralprojection darstellen.

29. Das einfache Hyperboloid. Man hat zuerst die in dem Früheren angegebene Erzeugungsmethode zu construiren, nach welcher es von einer geraden Linie beschrieben wird, welche fortwährend drei feste gerade Linien durchschneidet, von denen nicht zwei in derselben Ebene liegen. Die verschiedenen Lagen, welche die Erzeugende nach einander einnimmt, können nach folgenden beiden Methoden construirt werden: 1) Man wählt in der einen der gegebenen Geraden einen Punkt, legt durch ihn und je eine der beiden andern geraden Linien Ebenen und bestimmt die Durchschnittslinie derselben; sie ist die diesem Punkte entsprechende Lage der Erzeugenden.

2) Man legt durch die zweite und durch die dritte der gegebenen geraden Linien je eine Parallelebene zur ersten und schneidet dieselben durch eine beliebige durch diese erste Gerade gelegte Ebene. Die entstandenen Durchschnittslinien sind der ersten Geraden parallel und begegnen der zweiten und dritten in Punkten, welche man mit einander verbindet; die Verbindungslinie schneide nothwendig auch die erste

Gerade und ist demnach eine Erzeugende des Hyperboloids; ihr Durchgangs- und ihr Fluchtpunkt sind bestimmt, weil sie in der durch die erste gerade Linie gelegten Ebene enthalten ist.

Die aufeinanderfolgenden Lagen dieser erzeugenden Geraden bestimmen durch Umhüllung eine Curve, welche der sichtbare Umriss des Hyperboloids ist, und durch ihre Fluchtpunkte und ihre Durchgangspunkte zwei Curven, welche als die Fluchtlinie und die Spur des Hyperboloids zu bezeichnen sind.

Diese Curven, welche die Centralprojection des Hyperboloids vollständig bestimmen, sind als gegeben anzusehen, so bald man fünf Erzeugende des Hyperboloids kennt, weil fünf Tangenten oder fünf Punkte eine Curve zweiten Grades bestimmen. Daher genügt es, zu den drei Leitlinien des Hyperboloids zwei Lagen der Erzeugenden hinzu zu fügen, weil jene auch zu den Erzeugenden des Hyperboloids, nur zu dem andern System derselben, gehören.

Wenn die Spur und die Fluchtlinie des Hyperboloids bekannt sind, so muss man zu seiner vollständigen Bestimmung noch die Projection einer Erzeugenden oder Fluchtpunkt und Durchgangspunkt derselben festsetzen. Wenn man dann durch diese Erzeugende eine beliebige Ebene legt, so schneidet dieselbe die Oberfläche ausserdem noch in einer zweiten Erzeugenden, welche den zweiten Schnittpunkt der Spuren der Ebene und des Hyperboloids zu ihrem Durchgangspunkt und den zweiten Durchschnittspunkt der Fluchtlinien zu ihrem Fluchtpunkt hat.

Ein Punkt der Oberfläche, dessen Bild man kennt, wird durch die Angabe der Erzeugenden bestimmt, welche durch ihn hindurchgehen; diese sind aber die von ihm aus an den sichtbaren Umriss der Oberfläche gezogenen Tangenten. Jede derselben repräsentirt zwei Erzeugende der Oberfläche, weil sie sowohl ihre Fluchtlinie als ihre Spur in zwei Punkten schneidet, und es ergeben sich demnach zwei verschiedene Lagen des projicirten Punktes auf der Oberfläche.

Die Durchschnittscurve eines einfachen Hyperboloids mit einer Ebene bestimmt sich aus den Durchschnittspunkten ihrer Erzeugenden mit derselben und man erhält diese Punkte paarweis, da je zwei Erzeugende immer in der nämlichen Ebene liegen.

Die Durchschnittspunkte einer geraden Linie mit dem Hyperboloid bestimmen sich mittelst einer durch sie gelegten Hilfsebene und der ihr entsprechenden Durchschnittscurve. *)

Das Problem der Tangentialebenen erledigt sich durch die Bemerkung, dass jede Ebene, welche eine Erzeugende des Hyperboloids enthält, eine Tangentialebene desselben in dem Punkte ist, in welchem jene von der andern der Ebene angehörigen Erzeugenden geschnitten wird.

Darnach bestimmen sich die Tangenten eines einfachen Hyperboloids, welche von einem beliebigen Punkte im Raume aus gezogen werden können, dadurch, dass man durch diesen Punkt und je eine Erzeugende des Hyperboloids Ebenen legt und die Punkte, in welchen dieselben die Oberfläche berühren, mit dem gegebenen Punkte durch gerade Linien verbindet: diese sind die gesuchten Tangenten. Die Vereinigung aller dieser Tangenten bildet den Berührungskegel des Hyperboloids, welcher den gewählten Punkt zur Spitze hat. Die Construction des Berührungscylinders oder der einer gegebenen Geraden parallelen Tangenten ist ein specieller Fall hiervon.

Die Tangentialebenen eines Hyperboloids, welche durch eine gegebene gerade Linie gelegt werden können, werden bestimmt, indem man die Durchschnittspunkte dieser geraden Linie mit dem Hyperboloid construirt und durch jede der vier Erzeugenden, welche durch diese Punkte hindurchgehen und die gegebene gerade Linie eine Ebene legt; diese vier Ebenen fallen paarweise zusammen und geben die zwei Berührungsebenen, welche der Aufgabe im Allgemeinen genügen. Wenn die gerade Linie das Hyperboloid nicht schneidet, so können keine Tangentialebenen desselben durch sie hindurchgehen.

Wenn die gerade Linie in unendlicher Entfernung liegt, so tritt an ihre Stelle eine Ebene, der sie als Fluchtlinie angehört und die Aufgabe fordert die Bestimmung der Tangentialebenen des Hyperboloids, welche

*) Hier ergiebt sich auch die Auflösung der bekannten Aufgabe: Zu vier Geraden, von denen keine zwei in einer Ebene liegen, eine gemeinschaftliche Transversale zu ziehen.

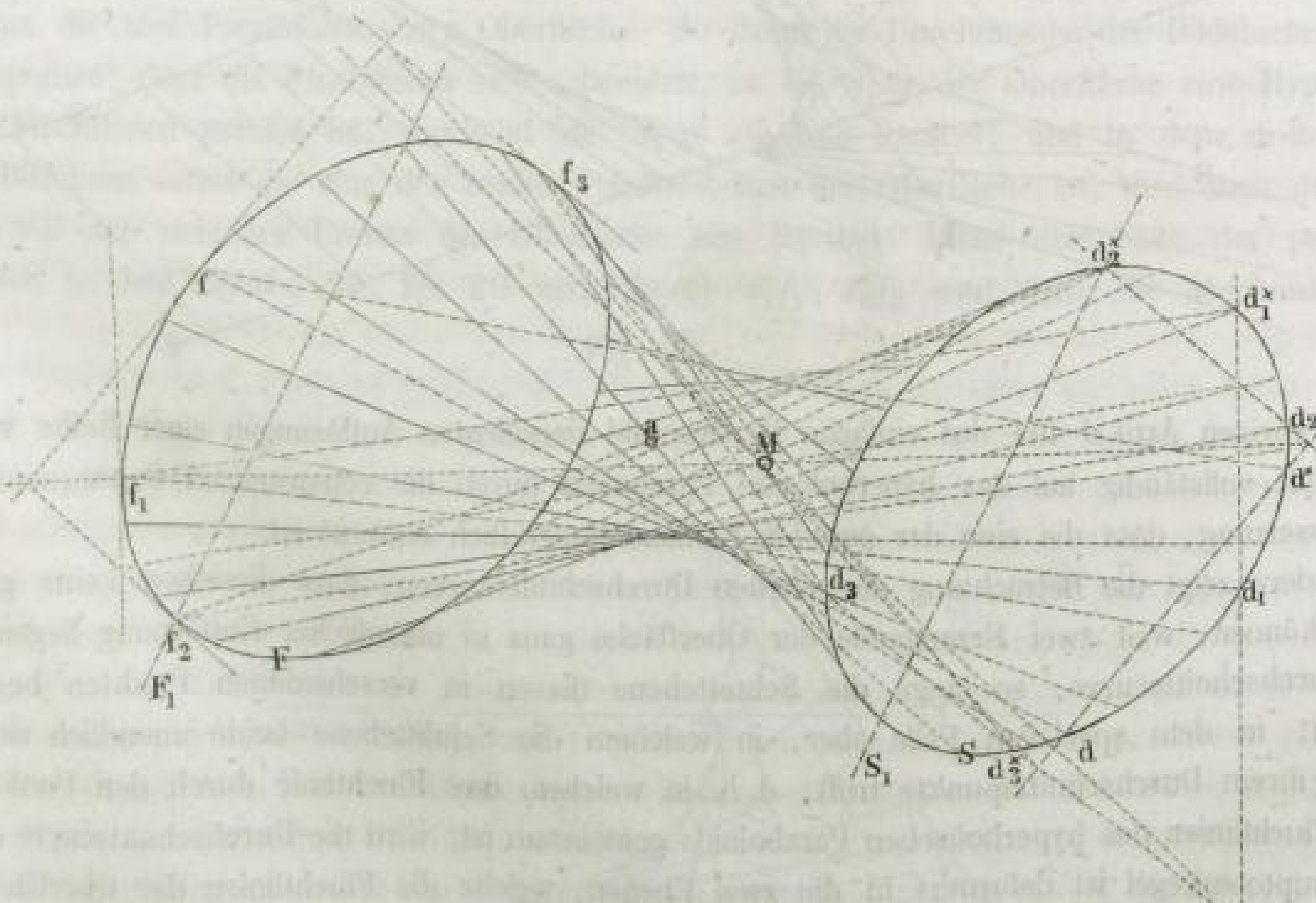
dieser Ebene parallel sind. Sie sind durch die vier Erzeugenden des Hyperboloids bestimmt, deren Fluchtpunkte der Fluchtlinie der bezeichneten Ebene angehören und die Aufgabe ist nicht lösbar, wenn solche Durchschnittspunkte nicht vorhanden sind.

Der Asymptotenkegel und seine Spitze, das Centrum der Oberfläche, werden durch die folgenden Betrachtungen bestimmt: Da die Erzeugenden des Asymptotenkegels denen des Hyperboloids parallel sind, so hat er mit demselben die nämliche Fluchtlinie und die Fluchtlinien seiner Tangentialebenen sind Tangenten dieser letzteren. Jede solche Berührungsebene schneidet das Hyperboloid in den beiden Erzeugenden, welche der Berührungsseite des Asymptotenkegels parallel sind. Dadurch bestimmt sich für jede Erzeugende des Hyperboloids die ihr parallele Erzeugende im andern Systeme derselben; die Ebene zweier solcher parallelen Erzeugenden enthält das Centrum des Hyperboloids und berührt den Asymptotenkegel; ihre Spur ist eine Tangente zur Spur desselben und man kann diese Letztere, da sie der Fluchtlinie und der Spur des Hyperboloids ähnlich und mit der letzteren concentrisch ist, hiernach bereits construiren. Drei solche Berührungsebenen des Asymptotenkegels bestimmen durch ihren Durchschnittspunkt das Centrum des einfachen Hyperboloids. Man kann dasselbe auch direct aus den drei geraden Leitlinien construiren, welche zur Bestimmung des Hyperboloids gegeben sein müssen; alsdann hat man die drei Erzeugenden desselben zu verzeichnen, welche je einer dieser Leitlinien parallel sind. Dies reducirt sich nach der ersten Construction, welche für die Erzeugenden des Hyperboloids angegeben worden ist, auf eine früher gelöste Aufgabe. (Siehe Aufgabe IX Art. 9.)

Aber auch die zweite früher angegebene Construction der Erzeugenden des Hyperboloids führt auf das nämliche Verfahren: Man legt durch die zweite und durch die dritte Gerade Ebenen, welche der ersten geraden Leitlinie parallel sind und bestimmt die Durchschnittslinie derselben; sie ist die Erzeugende des zweiten Systems, welche der ersten Geraden parallel ist. So bestimmen sich die drei den gegebenen Geraden parallelen Erzeugenden und die entsprechenden drei Berührungsebenen des Asymptotenkegels, damit aber auch seine Spitze, direct ohne vorherige Construction der Spur und Fluchtlinie der Oberfläche.

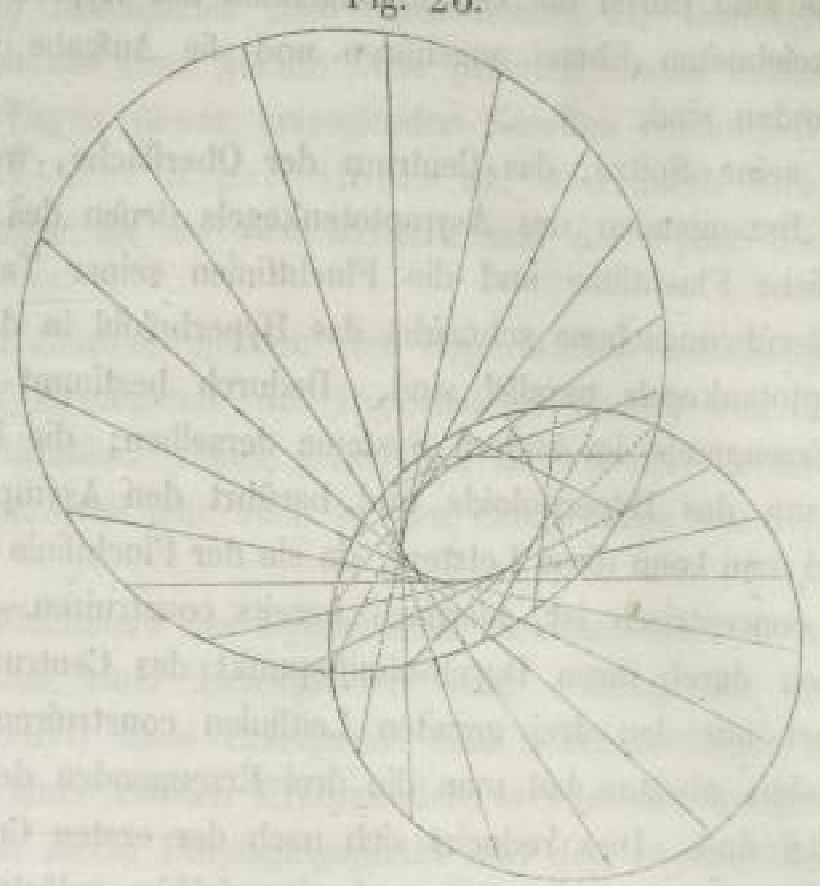
Die Figuren 25 und 26 vergegenwärtigen die beiden wesentlich verschiedenen Formen, unter welchen sich das einfache Hyperboloid abbilden kann: mit hyperbolischer Contour in dem einen, mit elliptischer

Fig. 25.



Contour in dem andern Falle. In der ersteren ist, wie man leicht erkennen wird, die Tangentialebene F_1, S_1 in einem Punkte a und die Construction des Centrums M der Oberfläche eingetragen.

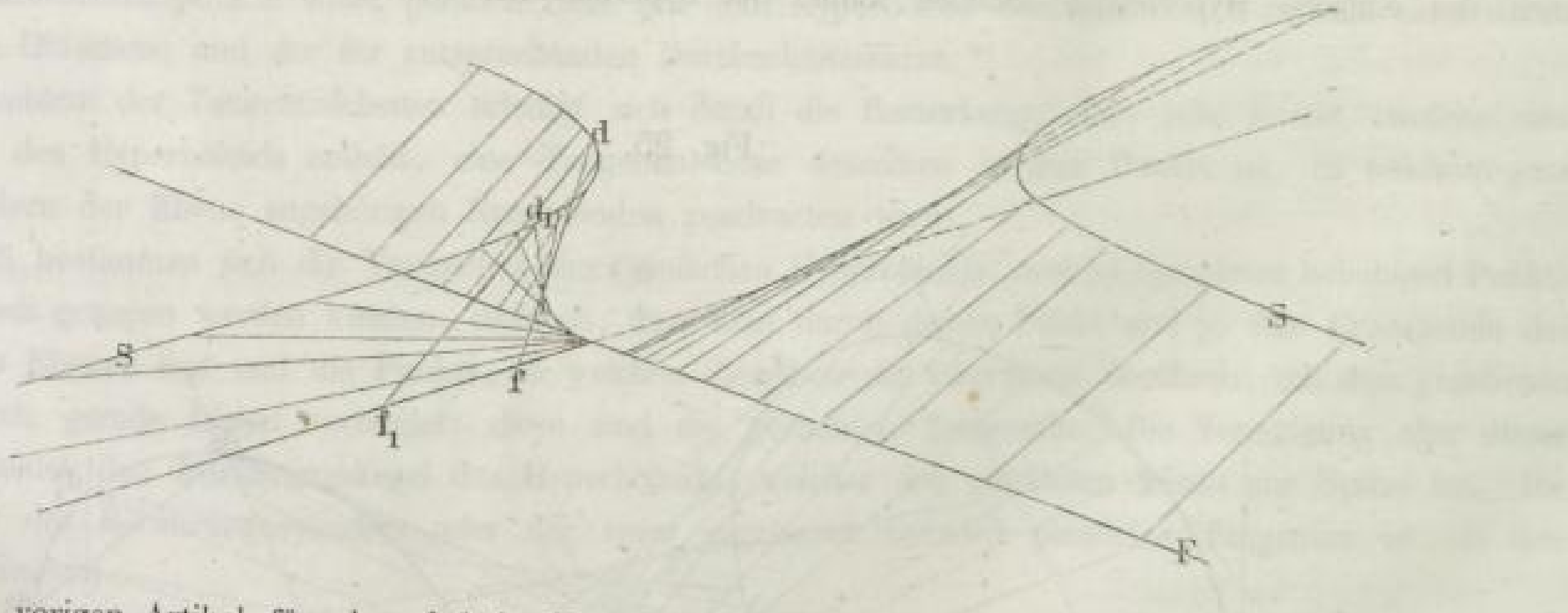
Fig. 26.



30. Das hyperbolische Paraboloid. Wie man weiss, wird es durch die Bewegung einer geraden Linie längs zweier festen Geraden und parallel einer unveränderlichen Ebene erzeugt. Es ist durch diese Geraden und die Fluchtlinie dieser Ebene — welche als die in unendlicher Entfernung gelegene dritte gerade Leitlinie angesehen werden darf — projectivisch bestimmt. Man erhält daraus die Erzeugenden, die Fluchtlinie und die Spur, sowie die sichtbare Grenze der Oberfläche wie folgt: Man legt zu jener Ebene beliebige Parallelebenen und bestimmt und verbindet die Durchschnittspunkte einer jeden mit den beiden geraden Leitlinien durch eine Gerade; diese Verbindungslinie ist eine Erzeugende der Oberfläche, berührt die sichtbare Grenze und hat einen Punkt der Spur zum Durchgangspunkt und einen Punkt der Fluchtlinie zum Fluchtpunkt. Man erkennt daraus, dass die Fluchtlinie des hyperbolischen Paraboloids aus den zwei geraden Linien besteht, welche als Fluchtlinie der Parallelebene und als Verbindungslinie der Fluchtpunkte beider Leitlinien gegeben sind.

Jede derselben enthält die Fluchtpunkte für ein System der Erzeugenden und ist die Fluchtlinie der Ebene, zu welcher die Erzeugenden des andern Systems parallel sind.

Fig. 27.



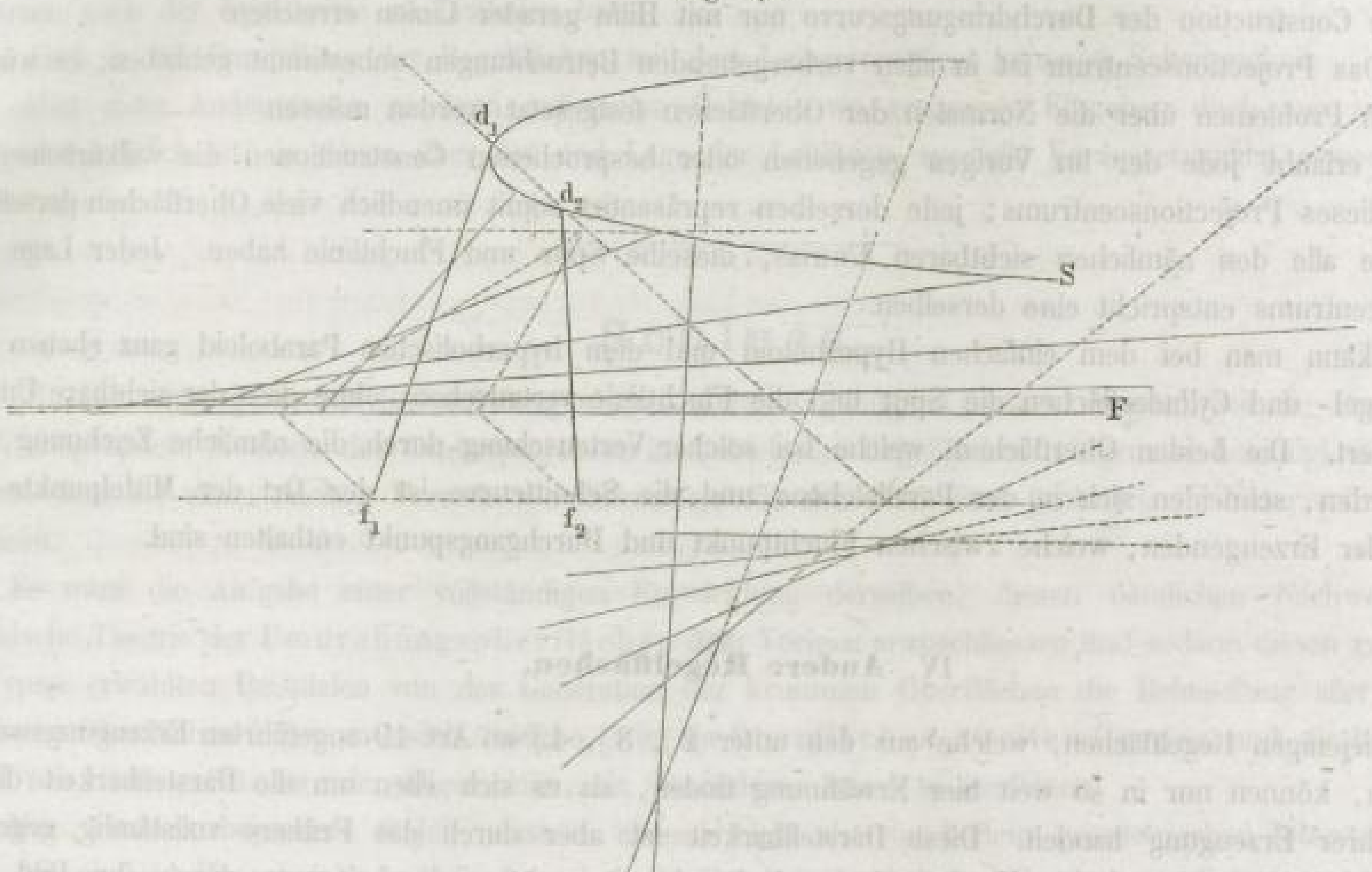
Die im vorigen Artikel für das einfache Hyperboloid dargelegten Auflösungen einer Reihe von Aufgaben übertragen sich vollständig auf das hyperbolische Paraboloid durch die constructiven Consequenzen der speciellen Voraussetzung, dass die eine der geraden Leitlinien unendlich entfernt ist.

Insbesondere zeigt die Betrachtung der ebenen Durchschnittscurven, dass dieselben keine geschlossenen Curven sein können, weil zwei Erzeugende der Oberfläche ganz in unendlicher Entfernung liegen; und zwar muss die Durchschnittscurve, so lange die Schnittebene diesen in verschiedenen Punkten begegnet, eine Hyperbel sein; in dem speciellen Falle aber, in welchem die Schnittebene beide unendlich entfernten Erzeugenden in ihrem Durchschnittspunkte trifft, d. h. in welchem ihre Fluchtlinie durch den Punkt geht, welcher beiden Fluchtlinien des hyperbolischen Paraboloids gemeinsam ist, wird die Durchschnittscurve eine Parabel.

Der Asymptotenkegel ist deformirt in die zwei Ebenen, welche die Fluchtlinien der Oberfläche zu ihren Fluchtlinien haben und seine Spitze oder das Centrum der Oberfläche ist der unendlich entfernte Punkt, welcher durch den Durchschnittspunkt dieser letzteren projicirt ist; jede gerade Linie in dieser Richtung ist ein Durchmesser des Paraboloids.

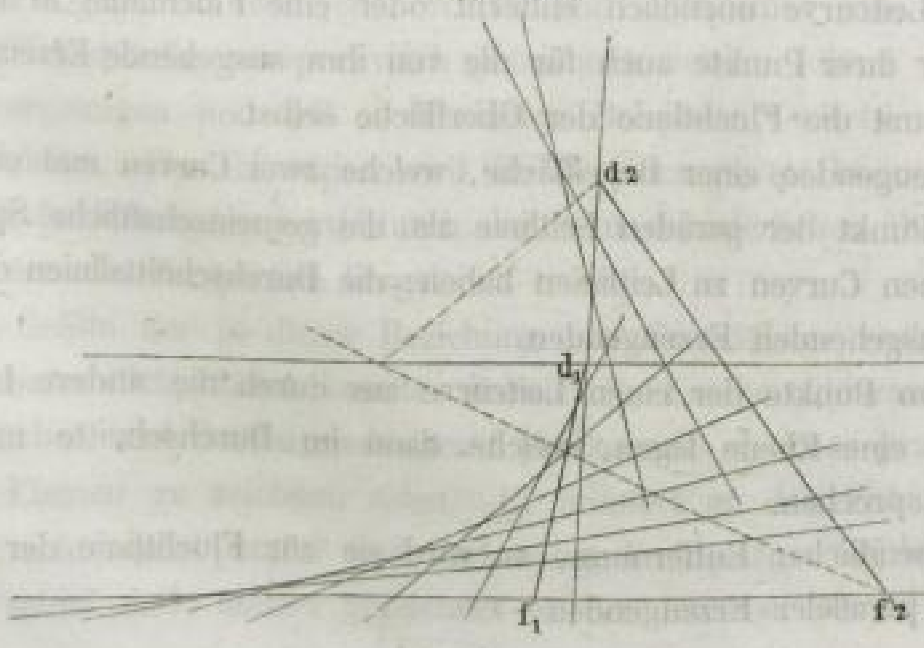
Dieser gemeinsame Fluchtpunkt aller Durchmesser oder der Durchschnittspunkt der Fluchtlinien des Paraboloids, kann in einem endlichen oder in einem unendlich entfernten Punkte projicirt sein; und zwar das Letztere in doppelter Art, nämlich einmal dadurch, dass beide Fluchtlinien parallel, aber in endlicher Entfernung projicirt sind, und sodann dadurch, dass die eine von beiden Fluchtlinien selbst in unendlicher Entfernung projicirt ist. In beiden letztern Fällen sind alle Durchmesser des hyperbolischen Para-

Fig. 28.



boloids der Bildebene parallel und in dem Falle einer in unendlicher Entfernung projicirten Fluchtlinie ist die Bildebene selbst die eine Parallelebene der Oberfläche. So lange die Durchmesser der Bildebene in endlicher Entfernung begegnen, oder die Fluchtlinien sich schneiden, ist die Spur der Oberfläche eine Hyperbel; wenn das Paar der Fluchtlinien parallel ist, erscheint die Spur als eine Parabel, und in dem dritten Falle, in welchem die Bildebene selbst die eine der beiden Parallelebenen der Oberfläche ist, wird auch die Spur eine gerade Linie und der sichtbare Umriss der Oberfläche eine Parabel. Diese drei Fälle der projectivischen Darstellung sind in den Figuren 27, 28, 29 verzeichnet; $d_1 f_1$, $d_2 f_2$ sind darin die gegebenen Leitlinien,

Fig. 29.



F die Fluchtlinie für das entsprechende System der Erzeugenden; in dem dritten Falle fehlt sie natürlich. Die Curven S sind die Spuren der dargestellten Oberflächen. Die sichtbare Grenze ist im ersten Falle eine Ellipse, im zweiten eine Hyperbel, im dritten eine Parabel. In diesem letztern Falle ist die Spur der Oberfläche die gerade Linie $d_1 d_2$.

Es bedarf kaum der Erwähnung, dass mit den angedeuteten Hilfsmitteln auch andere Aufgaben als die hier erwähnten aufgelöst werden können; man würde z. B. für die Durchdringungen des einfachen Hyperboloids oder des hyperbolischen Paraboloids mit Kegel- oder Cylinderflächen Hilfsebenen benutzen, welche die Spitze der Kegelfläche und je ein Paar Erzeugende des Hyperboloids oder Paraboloids enthalten und dadurch die Construction der Durchdringungscurve nur mit Hilfe gerader Linien erreichen.

31. Das Projectionscentrum ist in allen vorhergehenden Betrachtungen unbestimmt geblieben; es würde erst bei den Problemen über die Normalen der Oberflächen festgesetzt werden müssen.

Daher erlaubt jede der im Vorigen gegebenen oder besprochenen Constructionen die willkürliche Bestimmung dieses Projectionscentrums; jede derselben repräsentirt somit unendlich viele Oberflächen derselben Art, welche alle den nämlichen sichtbaren Umriss, dieselbe Spur und Fluchtlinie haben. Jeder Lage des Projectionscentrums entspricht eine derselben.

Auch kann man bei dem einfachen Hyperboloid und dem hyperbolischen Paraboloid ganz ebenso wie bei den Kegel- und Cylinderflächen die Spur und die Fluchtlinie vertauschen, ohne dass der sichtbare Umriss sich verändert. Die beiden Oberflächen, welche bei solcher Vertauschung durch die nämliche Zeichnung dargestellt werden, schneiden sich in der Parallelebene und die Schnittcurve ist der Ort der Mittelpunkte der Strecken aller Erzeugenden, welche zwischen Fluchtpunkt und Durchgangspunkt enthalten sind.

IV. **Andere Regelflächen.**

32. Diejenigen Regelflächen, welche aus den unter 2.), 3.), 4.) im Art. 19 angeführten Erzeugungsweisen hervorgehen, können nur in so weit hier Erwähnung finden, als es sich eben um die Darstellbarkeit dieses Vorgangs ihrer Erzeugung handelt. Diese Darstellbarkeit ist aber durch das Frühere vollständig gegeben. Jede gerade Leitlinie ist durch Fluchtpunkt und Durchgangspunkt, jede Leitcurve durch ihr Bild und eine Kegelfläche, für welche sie als Leitlinie gedient hat, projectivisch bestimmt. Eine unendlich entfernte gerade Leitlinie erscheint als gemeinsame Fluchtlinie von Parallelebenen, welche sich in ihr durchschneiden und eine unendlich entfernte Curve als gemeinsame Fluchtlinie einer Schaar von Kegelflächen. Die Darstellung gerade der unendlich entfernten Leitlinien ist die einfachere, wie es der Natur der Sache nach sein muss.

Soll man nun nach der unter 2.) (Art. 19) angegebenen Erzeugungsweise die verschiedenen Lagen einer Geraden verzeichnen, welche eine feste Curve und zwei feste gerade Linien fortwährend durchschneidet, so wählt man in der Curve einen Punkt und legt durch ihn und je eine der beiden Geraden eine Ebene; diese beiden Ebenen bestimmen in ihrer Durchschnittslinie die durch jenen Punkt gehende Erzeugende der fraglichen Regelfläche.

Ist in diesem Falle die Leitcurve unendlich entfernt oder eine Fluchtlinie in dem durch alles Frühere bezeichneten Sinn, so ist jeder ihrer Punkte auch für die von ihm ausgehende Erzeugende der Oberfläche der Fluchtpunkt und die Curve somit die Fluchtlinie der Oberfläche selbst.

Oder man erhält die Erzeugenden einer Regelfläche, welche zwei Curven und eine gerade Linie zu Leitlinien hat, indem man jeden Punkt der geraden Leitlinie als die gemeinschaftliche Spitze zweier Kegelflächen betrachtet, welche die gegebenen Curven zu Leitlinien haben: die Durchschnittslinien dieser beiden Kegelflächen sind die von jenem Punkte ausgehenden Erzeugenden.

Man kann auch von jedem Punkte der einen Leitcurve aus durch die andere Leitcurve eine Kegelfläche und durch die gerade Leitlinie eine Ebene legen, welche dann im Durchschnitte mit jener die Erzeugenden bestimmt, die dem Punkte entsprechen.

Ist eine der Curven in unendlicher Entfernung, so wird sie zur Fluchtlinie der Oberfläche und dieselbe besitzt dann zugleich Gruppen paralleler Erzeugenden.

Eine interessante Regelfläche ist die Schraubenfläche, sie hat im endlichen Raum eine Leitcurve, die Schraubenlinie, und eine gerade Leitlinie, die Achse der Schraube, überdiess aber eine unendlich entfernte kreisförmige Leitcurve, repräsentirt durch einen Rotationskegel, dessen Achse die Achse der Schraubenlinie ist. Eine Fläche derselben Art kann aus der Projection einer Kegelfläche abgeleitet werden, wenn man für jedes Paar ihrer Erzeugenden, welche durch dieselbe Linie projicirt sind, diejenigen Durchgangs- und Fluchtpunkte als zusammengehörig auffasst, welche es bei der Kegelfläche nicht sind. Die Spur, die Fluchtlinie und der sichtbare Umriss der Oberfläche bleiben dieselben, aber die Fläche ist nun ein Conoid, welches diese Fluchtlinie zu einer unendlich entfernten Leitcurve und überdies die Spur und die gerade Linie vom Projectionscentrum nach der Kegelspitze zu Leitlinien hat.

Auch in der Darstellung der Regelflächen mit drei Leitcurven liegt keinerlei Schwierigkeit.

Aber diese Andeutungen genügen auf einem Gebiete, wo genaueres Eingehen doch nur an Uebungsbeispielen möglich ist, in denen über Art und Lage der Leitlinien specielle Voraussetzungen gemacht werden.

Schluss.

33. Die vorhergehenden Entwickelungen sind vielleicht genügend, um zu zeigen, wie die streng geometrisch ausgebildete Methode der Centralprojection im Gebiete der Regelflächen mit grosser Leichtigkeit anwendbar ist und dass sie einen reichen Vorrath von Hilfsmitteln für die darstellend geometrische Untersuchung in sich darbietet.

Es wäre die Aufgabe einer vollständigen Entwicklung derselben, diesen nämlichen Nachweis für die graphische Theorie der Umdrehungsoberflächen dem Vorigen anzuschliessen und sodann diesen zwei grossen zu Typen erwählten Beispielen von der Generation der krummen Oberflächen die Behandlung aller derjenigen krummen Oberflächen folgen zu lassen, welche, wie die Oberflächen zweiten Grades und die Rückungs- und Umhüllungsflächen im Allgemeinen, ein besonderes Interesse verdienen.

Man würde insbesondere finden, dass es ebenso leicht als von hohem geometrischen Interesse ist, den über das einfache Hyperboloid und das hyperbolische Paraboloid erhaltenen Ergebnissen diejenigen hinzuzufügen, welche die Darstellung des dreiachsigen Ellipsoids, des elliptischen Paraboloids und des zweifachen Hyperboloids erfordert und enthält.

Alles dies kann jedoch an dieser Stelle nicht unternommen werden und darf um so eher unterbleiben, als die Absicht dieser Abhandlung weit weniger auf erschöpfende Vollständigkeit als auf die Darlegung einer Methode in ihren wesentlichen Grundgedanken gerichtet ist.

34. Ueber J. H. Lambert's „freie Perspective". Nach den in der Einleitung gegebenen Andeutungen ist zunächst noch etwas Näheres über die Beziehungen der in der vorstehenden Abhandlung entwickelten Methoden zu J. H. Lambert's Werk: „Die freie Perspective" zu sagen.

In diesem vortrefflichen Buche sind zuerst die Gesetze entwickelt, nach welchen jeder Grundriss in Perspective erscheint; es wird angegeben, wie jeder Winkel und allgemeiner jede nach Lage, Form und Grösse bestimmte Figur auf der Grundfläche perspectivisch gezeichnet werden könne. Dies ist in den vier ersten Abschnitten des Buches vorgetragen und mit ausführlichen Beispielen, welche überall an die Anforderungen der Praxis anknüpfen, begleitet. Der Grundriss wird als die vorzugsweis bequeme Bestimmungsmethode beibehalten, aber seine wirkliche Auftragung wird durch die dazu erforderlichen Abmessungen und Winkelgrössen ersetzt und direct aus diesen die Perspective hergeleitet.

Aber im natürlichen Gefühl der in dieser Beziehung zur Grundebene enthaltenen Einseitigkeit, welches dem ausgezeichneten Geometer nicht fehlen konnte, entwickelte Lambert hierauf im fünften Kapitel die Darstellung schiefliegender Flächen und dessen, was darauf vorkommt; ob zwar praktisch die Fälle selten wären, wo Figuren von schiefen Ebenen zu zeichnen seien. Er erinnert an den Fall der schiefliegenden Tafel, da alsdann senkrechte Linien nicht mehr parallel sind und selbst die Systeme auf horizontalen Ebenen, als welche nun gegen die Bildebene schief sind, anders gezeichnet werden müssen.

In den §§ dieses Kapitels ist sofort die vollkommenste Annäherung an die von mir vorausgesetzten und in der Note des M. Chasles enthaltenen Bestimmungsweisen.

Zwei gerade Linien lässt er in § 165 und § 166 die schiefe Fläche bestimmen: „Die erste ist diejenige, wo sie die Tafel durchschneidet und diese haben wir oben in Absicht auf die Grundfläche die Grundlinie genannt.“ Knotenlinie scheint dem Astronomen ein passender Name für dieselbe. „Die andere Linie ist diejenige, wo sich die Fläche endet, welche man in Hinsicht auf die Grundfläche die Horizontallinie nennt; in Absicht auf andere Flächen wollen wir sie Grenzlinie heissen, weil sie die äussersten Grenzen der Fläche vorstellt.“

Im § 168 u. f. erscheint alsdann als „Augenpunkt der Grenzlinie“ jener Punkt n des 11. Art. der vorigen Abhandlung, der in der Theorie des Herabschlagens und Zurückschlagens und somit bei allen Grössenbestimmungen eine so wichtige Rolle spielt; auf ihn und die Grenzlinie überträgt Lambert die Scale zur Ausmessung der Winkel, die er im ersten Kapitel auf dem Horizonte angebracht hatte und welche für das Auftragen von Systemen, die in diesen Ebenen liegen, so nützlich ist.

Nachdem er sodann bereits in § 177 den Punkt zu bestimmen gelehrt, „in welchen alle auf der Fläche stehenden Perpendicular-Linien auf der Tafel zusammenlaufen“, bezeichnet er im § 182 u. f., wo er von der Ausmessung der Linien spricht, die beiden Punkte der Linie als vorzüglich wichtige, den einen, in welchem die Linie die Tafel trifft, und den andern, wo sie die Grenzlinie ihrer Ebene durchschneidet; er verwendet dieselben zur Ausmessung und Abtheilung aller Linien auf der Fläche durch ihr Bild auf der Tafel.

Desgleichen zeigt er endlich in §§ 185 u. f., wie der Grenzpunkt der Normalen zu einer Fläche zur Ausmessung solcher Normalen verwendet werden kann.

Die bei Lambert vorkommenden Constructionen ergeben sich zumeist sehr leicht aus denen, welche in der vorhergehenden Abhandlung in der Abtheilung A entwickelt worden sind und man darf wohl sagen, dass durch die allgemein geometrische Theorie die Bedeutung der in ihnen vorkommenden Punkte und Linien wesentlich erhellt wird.

So ist es, um nur einige der interessantesten Beispiele zu erwähnen, mit den Aufgaben 14, § 191: „Auf einer gegebenen Linie der Hauptfläche eine andere zu verzeichnen, die auf derselben senkrecht ist“; 15, § 195: „Auf einer gegebenen Linie der Hauptfläche eine andere Fläche zu verzeichnen, so sich gegen dieselbe unter einem gegebenen Winkel neiget.“

Ebenso findet sich im sechsten Abschnitt, welcher Anmerkungen und Beispiele zum fünften liefert, noch Manches, was mit den Entwickelungen des vorliegenden Abrisses sehr nahe zusammenfällt, z. B. der Satz § 216: „Wenn man die beiden Schenkel eines Winkels auf der Tafel bis an die Grenzlinie verlängert, und die beiden Punkte bemerkt, wo sie dieselben durchschneiden, so wird der fürgegebene Winkel auf der Tafel das Bild desjenigen sein, den die aus diesen beiden Punkten in das Auge gezogenen Linien in demselben machen.“ Dies ist genau das Princip, welches für die Darstellung der wahren Grösse von Winkeln im Art. 12, Aufg. II der vorigen Abhandlung verwendet worden ist.

Nach alle diesem dürfte wohl die Priorität für jene Grundgedanken einer wahrhaft geometrischen Centralprojection, wie sie M. Chasles in der angeführten Stelle seines Werkes anführt, vor M. Cousinery unserm deutschen Geometer J. H. Lambert zugesprochen werden müssen.

Die vorliegende Abhandlung aber darf als eine von jeder Rücksicht auf das Praktische der Perspective als Grundlage der zeichnenden Kunst befreite Darstellung und Entwickelung der schon in J. H. Lambert's noch immer in jedem Betracht vortrefflichem Buche niedergelegten geometrischen Grundgedanken angesehen werden.

Man wird jedoch auch hier hoffentlich finden, was von aller Erfahrung auch anderwärts bestätigt wird, dass die reinste Theorie die beste Vorschule der Praxis ist.

35. Centralprojection und Parallelprojection. Indess bei der Entwickelung der Centralprojection alle Beziehungen auf die Theorie der Parallelprojectionen im Allgemeinen vermieden werden mussten, scheint die Bemerkung hier am Orte, dass eben diese selbständige Ausbildung der Centralprojection vielfach zu solchen Vergleichungen auffordert, welche von methodischem Interesse sind. Zu ihrer Bestätigung genügt die kurze Anführung eines derartigen Falles.

Der für gerade Linien und Ebenen, so wie für alle Regelflächen, hier nachgewiesenen Vertauschbarkeit der Flucht- und Durchgangspunkte, so wie der Fluchtlinien und Spuren, entspricht in der Parallelprojection eine Vertauschung zweier Durchgangspunkte einer geraden Linie, zweier Spuren einer Ebene, einer Kegelfläche u. s. w. Und so wie hier sich ergab, dass dergleichen gerade Linien, deren Fluchtpunkt und Durchgangspunkt wechselseitig zusammenfallen, sich in einer Ebene schneiden, die eben so weit hinter der Bildebene liegt, wie das Projectionscentrum vor derselben, und dass solche Ebenen und ganz allgemein solche Regelflächen, deren Fluchtlinien und Spuren in derselben Art vertauscht sind, sich in dieser nämlichen Ebene durchschneiden, so ergiebt sich in der Parallelprojection dem ganz analog, dass solche gerade Linien, Ebenen und Regelflächen, welche durch dieselben Durchgangspunkte oder Spuren unter gegenseitiger Vertauschung der ihnen zukommenden Ordnungsnummern der Projectionsebenen bestimmt werden, Durchschnittspunkte, gerade und krumme Durchschnittslinien erzeugen, die für jedes Paar von Projectionen in der festen Ebene liegen, welche den Winkel zwischen den zugehörigen Projectionsebenen halbirt und deren Punkte zwei gleiche projicirende Linien von entgegengesetztem Vorzeichen besitzen.

Um an einem Beispiele mich zu erklären, führe ich an: Eine Cylinder- oder Kegelfläche, deren erste Spur C_1 und deren zweite Spur C_2 ist, schneidet diejenige zweite Fläche, welche die Curve C_1 zur zweiten und die Curve C_2 zur ersten Spur hat, in einer ebenen Curve in der Halbirungsebene des Winkels zwischen der Aufriss- und Grundebene, welche — ich setze die dem Coordinatensystem der analytischen Geometrie analoge Bezeichnung voraus — von unten vorn nach oben hinten geht. Ebenso bei den andern Projectionen, also für die Gruppen: Grundriss und Seitenriss, Aufriss und Seitenriss, und bei allen andern Regelflächen.

Schon in den Elementen der Parallelprojectionslehre kann man die eigenthümliche Bedeutung erkennen, welche diesen Punkten und Punktsystemen in den bezeichneten drei Winkelhalbirungsebenen des Projectionssystems zukommt: für jede derselben decken sich zwei Projectionen und die dritte liegt in einer der geraden Linien, welche die Winkel des Achsensystems halbiren u. s. w. Ich deute aber das weit höhere Interesse an, welches diese eigenthümlichen Durchdringungen noch überdem besitzen, indem ich bemerke, dass die Durchschnittslinie zweier Ebenen, deren erste und zweite Spuren in dieser Weise vertauscht sind, die Affinitätsachse für die Verwandtschaft des Grund- und Aufrisses aller der Systeme ist, welche auf diesen Ebenen verzeichnet sein können.

Man hat bisher die Existenz dieser Achsen unbemerkt gelassen, welche doch vorhanden sein müssen, weil die affinen Systeme, welche Grundriss und Aufriss, oder Aufriss und Seitenriss derselben ebenen Figur bilden, auch in affiner Lage sind.

Eine eigenthümliche geometrische Anwendung dieser Achsen ist von mir in der Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. V, S. 56 f. entwickelt worden.

Von besonderem methodischen Werth ist aber auch der vollständige Parallelismus, welcher zwischen dem Gange der Entwickelung in der Theorie der Parallelprojection und demjenigen in der Theorie der Centralprojection stattfindet, und welcher in der Gleichheit der anzuwendenden geometrischen Hilfsmittel begründet ist. Nichts kann die Raumanschauung des Anfängers mehr fördern, als die Ueberlieferung zweier so verschiedener und doch so gleich selbständiger Darstellungsmethoden für räumliche Formen.

Und wenn man hiervon Anlass nimmt, beide Darstellungsmethoden in Bezug auf Einfachheit und Brauchbarkeit der daraus entspringenden Projectionen zu vergleichen, so muss man zwar anerkennen, dass die Parallelprojection überall im Vortheil ist, wo es sich um die Ableitung von Maassen und von Winkelgrössen handelt, weil in ihr so viele Längen und Winkel in wahrer Grösse erscheinen, welche nicht der Bildebene angehören, aber doch andererseits der Centralprojection den Vorzug lassen, dass sie die allgemeinen Beziehungen der gegenseitigen Lage der Raumformen in viel grösserer Einfachheit und mit einer viel unmittelbarer eindringenden Anschaulichkeit wiederzugeben vermag.

36. Geometrische Bedeutung der Centralprojection. Deshalb ist auch die Methode der Centralprojection von viel grösserer geometrischer Fruchtbarkeit als die der Parallelprojectionen und deshalb ist es, dass die letztere, wenn man beide Methoden als geometrische Untersuchungs- und Beweismethoden betrachtet, als ein einfacher specieller Fall der ersteren erscheint.

Ich habe in dem Art. 1 (Grundbegriffe) ausdrücklich hervorgehoben und begründet, dass beide Methoden als Darstellungsmittel betrachtet, vollständig unabhängig von einander sind. Betrachtet man sie aber als Methoden geometrischer Untersuchung, so erscheint die eine vor Allem deshalb als ein specieller Fall der andern, weil unter diesem Gesichtspunkt der geometrische Zusammenhang zwischen einer Projection und dem Originalsystem das eigentlich Wesentliche ist und somit das Vorhandensein mehrerer Projectionen zunächst nur durch eine einfache Repetition dieses Zusammenhangs sich geltend macht. Damit ist die grössere Allgemeinheit der Centralprojection ausser allem Zweifel.

Seit den berühmten Arbeiten der HH. Poncelet, Möbius, Steiner und Chasles ist die Fruchtbarkeit und Kraft dieser Methode des Beweises durch perspectivische Transformation allgemein bekannt.

Man hat diese Methode sogar in die Elemente der analytischen Geometrie (vergleiche Sohnke's Buch: „Analytische Geometrie“ und die ausgezeichnete Darstellung in Mr. Salmon's „Treatise on Conic Sections“) aufgenommen und damit sicherlich ihren Werth nicht überschätzt.

Ich brauche nur anzudeuten, wie ihre Kraft darin besteht, dass sie durch den geometrischen Zusammenhang zwischen der Perspective und der Originalfigur den Beweis für eine Eigenschaft dieser letzteren auf den Beweis für die entsprechende Eigenschaft der einfachsten aller der Figuren reducirt, in welche die gegebene projicirt werden kann, und wie diese einfachsten aller Projectionen gemeiniglich dadurch erlangt werden, dass man einen Punkt oder eine gerade Linie der Figur in der Gegenebene gelegen voraussetzt. (Man projicirt z. B. jedes Viereck in ein Parallelogramm, indem man die Durchschnittspunkte seiner Gegenseiten in die Gegenebene bringt.) Aber es kann hier nicht meine Absicht sein, einen Gegenstand näher zu untersuchen, der eine eigene ausführliche Betrachtung erfordert; ich gedenke nur zu zeigen, wie die Darstellungen der Centralprojection für sich selbst in solcher Weise ergiebig sind.

Die Bedeutung, welche die Aehnlichkeit und die ähnliche Lage von Punkte-Systemen in der Darstellung der Kegelflächen erhielt, lässt auf dergleichen schliessen, und es ist ein glänzendes Beispiel für den rein geometrischen Werth, den solche Constructionen in Folge dieser Beziehungen haben, dass man die schöne Auflösung des Apollonischen Problems, welche Gergonne gegeben hat, aus der Centralprojection einer einfachen Aufgabe über drei Kegelflächen herleiten kann. Aber auch aus den einfachsten Constructionen der Elemente lässt sich geometrische Ausbeute gewinnen. Eine Gruppe dieser Letztern möge in diesem Sinne schliesslich hervorgehoben werden.

Im 1. Bande von H. Magnus' „Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen“ und sonst an mehreren Orten findet sich der Satz: Wenn die Scheitel dreier Winkel in einer geraden Linie liegen, so schneiden sich die sechs Diagonalen der drei daraus entspringenden Vierecke viermal zu je dreien in einem Punkte.

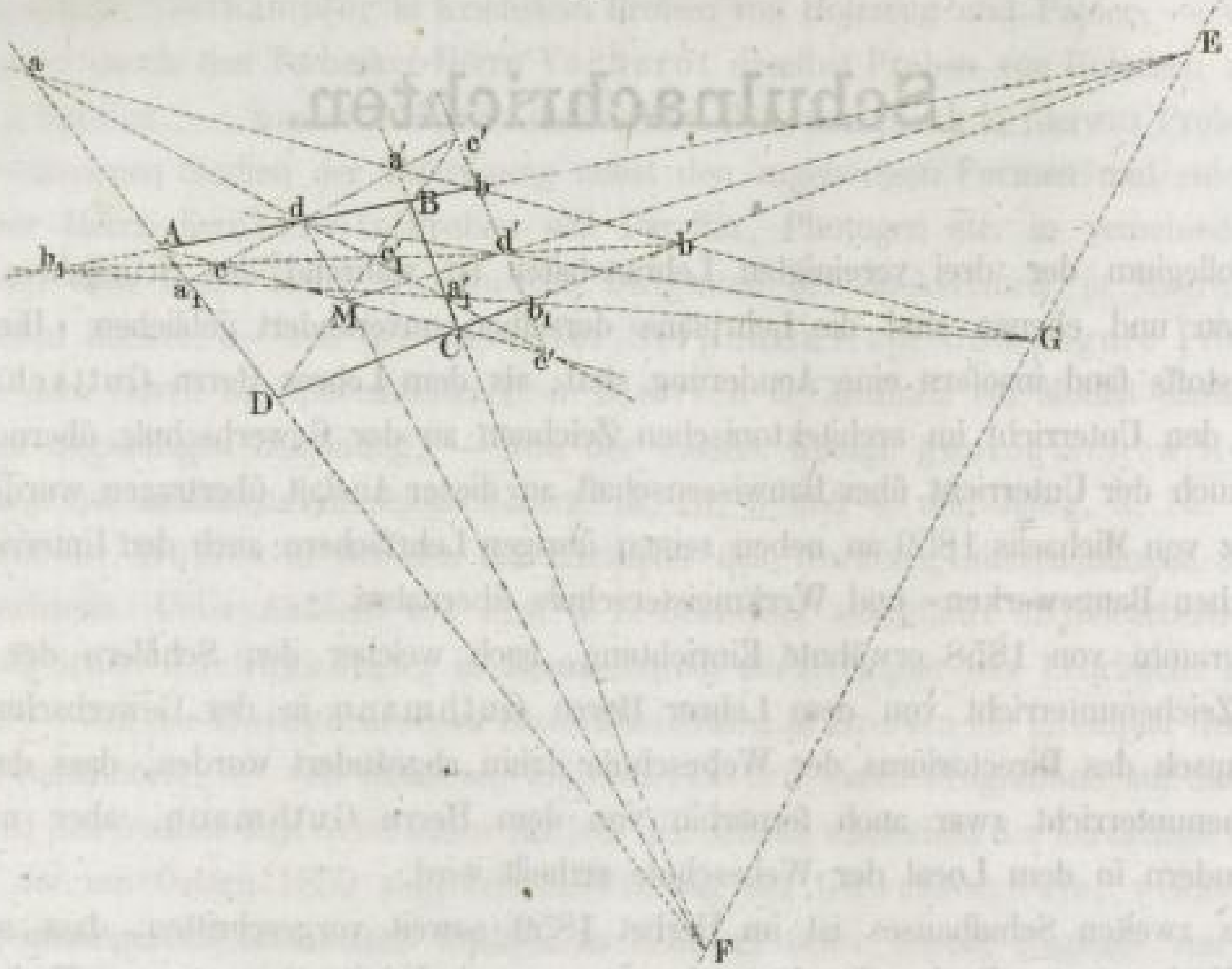
Die Figur, welche diesem Satze entspricht, ist die Centralprojection derjenigen, welche den Durchschnittspunkt dreier Ebenen darstellt. Diese selbst liefert den Satz: Wenn drei Paare paralleler gerader Linien sich schneiden, so gehen die sechs Diagonalen der dadurch entstehenden drei Parallelogramme viermal zu je dreien durch einen Punkt. Der Beweis desselben ist in der Nothwendigkeit enthalten, dass drei Ebenen sich in einem Punkte schneiden, und in dem Umstande, dass drei Paare von Parallelen durch Vertauschung zwischen Fluchtlinien und Spuren acht Gruppen von drei Ebenen bestimmen, die sich in vier Paare ordnen, von denen jedes nur einen Schnittpunkt liefert.

Von diesem Satze gelangt man zu dem allgemeineren, der oben angeführt wurde, indem man die Centralprojection seiner Figur bildet; aus den drei Paaren von Parallelen werden drei Paare sich schneidender Geraden, deren Durchschnittspunkte in der Fluchtlinie der Ebene liegen, in welcher die Figur gedacht wird.

Wenn man dabei in dieser Ebene die Figur so legt, dass eine der Ecken oder Seiten derselben der Gegenebene angehört, so erhält man auf demselben Wege specielle Fälle dieses Satzes.

In derselben Art lässt sich das in der nämlichen Aufg. VII, Art. 9 angegebene Verfahren benutzen, durch welches man die Durchschnittslinie zweier Ebenen bestimmt, ohne ihren Durchgangs- und Fluchtpunkt erhalten zu können. Man erhält daraus den Satz: Wenn man in einem vollständigen Viereck aus einem Punkte der geraden Verbindungslinie der Gegenecken Transversalen zieht, so schneiden sich die geraden Linien, welche die Durchschnittspunkte derselben mit den Gegenseiten des Vierecks miteinander verbinden, in den Diagonalen derselben *) — welcher, wie zu vermuthen war, nur ein anderer Ausdruck des vorigen ist. (Fig. 30.)

Fig. 30.



Aber auch die dritte in jener Aufgabe VII, Art. 9 enthaltene Construction, nämlich die für den Durchschnittspunkt einer geraden Linie mit einer Ebene, liefert einen geometrischen Satz; er lautet: Wenn man von zwei festen Punkten nach zwei festen geraden Linien Transversalen zieht, die sich in einer durch den Schnittpunkt jener Geraden gelegten festen geraden Linie schneiden, so gehen die Diagonalen des für jedes Paar der Transversalen entstehenden Vierecks durch zwei feste Punkte in der Verbindungslinie der beiden gegebenen Punkte.

*) Jedes Paar Transversalen liefert 4 gerade Verbindungslinien der Schnittpunkte in den Gegenseiten und demnach sechs Durchschnittspunkte; von denselben liegen 4 paarweise in den Diagonalen des Vierecks und die übrigen 2 in den Verbindungslinien des Durchschnittspunktes der Diagonalen mit den Durchschnittspunkten der Gegenseiten und in einer von dem gewählten Punkte ausgehenden Geraden.

Chemnitz, Ende Januar 1860.

Dr. Wilhelm Fiedler.

Schulnachrichten.

In dem Lehrercollegium der drei vereinigten Lehranstalten ist während des Schuljahres 1859—60 kein Wechsel eingetreten und ebenso sind die Lehrpläne derselben unverändert geblieben. Hinsichtlich der Vertheilung des Lehrstoffs fand insofern eine Aenderung statt, als dem Lehrer Herrn Gottschaldt, nachdem er im vorigen Jahre den Unterricht im architektonischen Zeichnen an der Gewerbschule übernommen hatte, von Ostern 1859 an auch der Unterricht über Bauwissenschaft an dieser Anstalt übertragen wurde, und der Lehrer Herr Kankelwitz von Michaelis 1859 an neben seinen übrigen Lehrfächern auch den Unterricht über Spinnerei an der mechanischen Baugewerken- und Werkmeisterschule übernahm.

Die im Programm von 1858 erwähnte Einrichtung, nach welcher den Schülern der hiesigen höheren Webeschule der Zeichenunterricht von dem Lehrer Herrn Guthmann in der Gewerbschule ertheilt wurde, ist nach dem Wunsch des Directoriums der Webeschule dahin abgeändert worden, dass den Schülern dieser Anstalt der Zeichenunterricht zwar auch fernerhin von dem Herrn Guthmann, aber nicht mehr in der Gewerbschule, sondern in dem Local der Webeschule ertheilt wird.

Der Bau des zweiten Schulhauses ist im Herbst 1859 soweit vorgeschritten, dass sowohl das Hauptgebäude als der Vorbau unter Dach gebracht und ersteres auch bereits zum grossen Theil ausgebaut wurde. Die Anordnungen für die Fortsetzung des Baues sind so getroffen, dass das neue Haus im nächsten Sommer bezogen werden kann.

Am 12. December 1859 feierten die drei vereinigten Lehranstalten das Geburtsfest Seiner Majestät des Königs durch einen solennen öffentlichen Actus. Derselbe begann mit dem Gesange eines Chorals, worauf der Schuldirector in einer kurzen Rede den Empfindungen des Tages Ausdruck gab und besonders die Vorsätze berührte, welche durch die Liebe und Dankbarkeit gegen den edlen König angeregt werden müssen. Daran reihten sich Vorträge der Gewerbschüler Pommer aus Chemnitz und Matthes aus Dorfschellenberg, worauf von dem Sängerchor der Johanniskirche die Schicht'sche Motette „Heil'ger Quell der ew'gen Seligkeit" gesungen wurde. Der Lehrer Herr Dr. Wunder hielt sodann die Festrede. Von dem Vergleich zwischen Staat und Familie ausgehend, wies er im Eingange derselben darauf hin, dass, wie dem Vater das Glück seiner Kinder, so dem Könige das Glück seiner Unterthanen vor Allem am Herzen liege, und besprach darauf das Thema: „Das innere Leben ist die Basis unseres wahren Glücks", wobei er zeigte, dass das innere Leben den Menschen vor den Gefahren schützt, denen das zerstreuende Geschäfts- und Alltagsleben ihn aussetzt, dass es ihn gegenüber den Bedrängnissen des Schicksals Stand halten lehrt und dass es seinem Gemüth eine heitere Ruhe giebt. Der Gesang des Sachsenliedes bildete den Schluss der Feier.

Für die Bibliothek der drei Lehranstalten sind in dem verflossenen Jahre wieder viele werthvolle Bücher und Zeichnungen angekauft und ebenso sind die übrigen Lehrmittel derselben wieder vielfach vermehrt worden. In letzterer Hinsicht mag hier erwähnt werden, dass an der Gewerbschule namentlich für den landwirthschaftlichen Unterricht die Modelle einer Garrett'schen Universal-Drillmaschine, einer Garrett'schen Pferdehacke, einer Salmon'schen Heuwendemaschine, einer Crosskill'schen Wurzelwaschmaschine und einer Hohenheimer Wurzelschneidemaschine, für den technologischen Unterricht ein Sortiment Scheren, Meissel und andere Werkzeuge, für den Unterricht über Maschinenlehre Schmiervorrichtungen verschiedener Art, ein Absperrventil für Wasserleitungen und ein Lagerarm, für den chemischen Unterricht eine Partie Mineralien zur Vervollständigung der im vorigen Jahre für diesen Unterricht angelegten Mineraliensammlung, für den mineralogischen Unterricht ein Sortiment geschliffener Edelsteine, an der mechanischen Baugewerken- und Werkmeisterschule namentlich Modelle von Kesselblechvernietungen, so wie von Zapfenlagern und Ventilen verschiedener Art, angeschafft wurden. Die Sammlungen der Gewerbschule sind auch durch Geschenke mehrfach bereichert worden. Das Hohe Königliche Ministerium des Innern theilte derselben ein Exemplar der von Strack herausgegebenen deutschen Uebersetzung der Naturgeschichte von Plinius mit. Ausserdem erhielt die Gewerbschule an Geschenken: Von dem Herrn Papierfabrikant Niethammer in Kriebstein Proben von Holzzeug und Papier, — von dem Hüttenwerk Morgenröthe durch den Techniker Herrn Vacherot daselbst Proben von Roheisen und Schmiedeeisen nebst zugehörigen Schlacken, — von dem Herrn Glasfabrikant Blumenreich in Gleiwitz Proben von geblasenen Glaswaaren in verschiedenen Stadien der Anfertigung nebst den zugehörigen Formen und einer Glasbläserzange, — von dem Lehrer Herrn Kankelwitz Proben von Paraffin, Photogen etc. in verschiedenen Stadien der Fabrikation, — von dem Herrn H. H. Bergmann, Dirigenten der Zuckerfabrik in Mucrena, ein Sortiment Proben von indischem Zucker, — von der Zöblitzer Serpentinstein-Compagnie Proben von polirtem Serpentin, — von dem Herrn Klempnermeister C. A. Dietrich in Chemnitz ein Modell eines blechernen Dachfensters nebst einer zugehörigen Zeichnung, — von der Kaiserl. Königl. geologischen Reichsanstalt in Wien die Fortsetzung des Jahrbuchs derselben (Jahrg. IX, Nr. 3 und 4, und Jahrg. X, Nr. 1, 2 und 3), — von dem Herrn Prof. Dr. Hülsse in Dresden ein Exemplar des Werkes „Untersuchungen über die Heizkraft der Steinkohlen Sachsens. Unter Aufsicht von Prof. J. B. Schneider ausgeführt und bearbeitet von E. Hartig.“, — von der Vieweg'schen Buchhandlung in Braunschweig ein Exemplar des Lehrbuchs der Mechanik von Wernicke, II. Theil, — von der Heinrich'schen Buchhandlung in Dresden ein Exemplar der Flora des Königreichs Sachsen von Rabenhorst, — von mehreren Lehranstalten deren Programme auf das Jahr 1859. Für diese Geschenke wird den freundlichen Gebern hier Namens der Anstalt wiederholt der herzlichste Dank dargebracht.

Am Schlusse der um Ostern 1859 abgehaltenen Prüfung der Gewerbschule, welcher Herr Geheimer Rath Dr. Weinlig unausgesetzt beiwohnte, wurden an Schüler dieser Anstalt folgende von dem Königlichen Ministerium des Innern verwilligte Auszeichnungen ertheilt:

die silberne Preismedaille an	Franz Robert Lehmann aus Böhrigen;
die bronzene Preismedaille an	Paul Adolf Schulze aus Crimmitschau,
	Emil Robert Lembcke aus Chemnitz,
	Karl Friedrich August Anschütz aus Wondolleck,
	August Eduard Wilhelm Höhn aus Thalbürgel,
	Karl Georg Fröhlich aus Warnsdorf und
	Oskar Theodor Rötzschke aus Zwenkau;
das Belobungsdecret an	Friedrich Hugo Lehmann aus Ziegra,
	Karl Ludwig Steyer aus Naundorf,
	Julius Gräfe aus Beiern,
	Ernst Emil Mietzsch aus Grosssteinberg,
	Karl Friedrich Morgenstern aus Chemnitz,
	Franz Louis Müller aus Greiz,
	Gustav Adolf Neubert aus Pleil,
	Georg Paul Wappler aus Leipzig,
	Friedrich Otto Ruppert aus Chemnitz,
	Paul Emil Falk aus Zwickau und
	Friedrich Emil Eckardt aus Chemnitz.

Der Lehrcursus 1859 — 60 wurde an der Gewerbschule am 4. Mai eröffnet, nachdem am 2. Mai die Aufnahme-Prüfung abgehalten war. Die Frequenzverhältnisse, welche in demselben an der Gewerbschule stattfanden, ergeben sich aus der folgenden Zusammenstellung, in welcher die in die Columnen V eingetragenen Zahlen auf diejenigen Schüler sich beziehen, welche an dem vollen Unterricht der betreffenden Classe, insoweit er nach Maassgabe ihres künftigen Berufs überhaupt für sie in Betracht kam, Theil nahmen, die in die Columnen E eingetragenen Zahlen dagegen auf diejenigen Bezug haben, welche nur für einzelne Lehrfächer dem Unterricht beiwohnten.

	Classe I.		Classe II.		Classe III.		Classe IV.		Fabrikzeichenunterricht*).		Gesammtzahl.
	V.	E.	V.	E.	V.	E.	V.	E.	Cl. I.	Cl. II.	
Am Schlusse des vorigen Cursus verliessen die Gewerbschule	16	2	26	1	13	2	17	1	5	6	89
und verblieben an derselben	11	—	39	3	49	—	4	—	23	11	140
Zu Anfang des Cursus traten ein	—	—	—	—	11	—	76	—	2	5	94
Während des Cursus traten ein	—	—	—	—	3	—	5	3	2	5	18
Daher war die Gesammtfrequenz der Gewerbschule	11	—	39	3	63	—	85	3	27	21	252
Während des Cursus verliessen dieselbe	1	—	3	1	7	—	13	1	8	6	40
Folglich betrug die Frequenz am Schlusse des Cursus	10	—	36	2	56	—	72	2	19	15	212

Die landwirthschaftliche Abtheilung der Gewerbschule zählte in dem verflossenen Schuljahre 59 Schüler (11 in der zweiten, 23 in der dritten und 25 in der vierten Classe), was 28,9 Proc. der vorstehend angegebenen Gesammtfrequenz (die Fabrikzeichenschüler nicht mit gerechnet) ausmacht.

Nach vollständig beendetem Cursus gingen um Ostern 1859 folgende Schüler von der Gewerbschule ab, mit den beigesetzten Gesammtcensuren in Kenntnissen und im Verhalten:

Aus der ersten Classe:

Hermann Bruno Arndt aus Chemnitz, III. I.
Ernst Robert Lindner aus Wendisch-Luppa, II. I.
Paul Adolf Schulze aus Crimmitschau, II. I.
Gustav Moritz Schulze aus Crimmitschau, I^b. I.
Louis Bruno Schwalbe aus Chemnitz, III. I.
Friedrich Emil Tänzler aus Burgstädt, II. I.
Ferdinand Oskar Wittig aus Neidhardtsthal, III^b. I.
Paul Traugott Richter aus Stolpen, II^b. I^b.
Ernst Edmund Focke aus Freiberg, III. I.
Emil Robert Lembcke aus Chemnitz, II. I.
Karl Gustav Rentzsch aus Chemnitz, II. I.
Lothar Engelbert Weigand aus Chemnitz, II^b. I.
(Widmeten sich dem Maschinenbau.)

Oswald Bruno Fischer aus Gückelsberg, II^b. I^b.
Heinrich Clemens Lohse aus Kemtau, II^b. I.
(Widmeten sich der Baumwollspinnerei.)

Friedrich Heinrich Karl Huscher aus Asch, II^b. I^b. (Wollte sich der Weberei widmen.)
Franz Robert Lehmann aus Böhrigen, I^b. I. (Widmete sich der Tuchfabrikation.)

*) Hier sind die Gewerbschüler, welche an dem Fabrikzeichenunterricht Theil nahmen, nicht mit gezählt.

Aus der zweiten Classe:

Karl Christian Hermann Hensel aus Nassenberg, III. I.
Ernst Knoll aus Auerbach, III^b. II.
Friedrich Otto Kreiss aus Rothenfurth, III^b. I.
Johann Louis Kühn aus Wilchwitz, II^b. I.
Friedrich Hermann Popp aus Ammelgosswitz, II^b. I.
Franz Julius Rossberg aus Lützschnitz, III. II.
Karl Ernst Ufer aus Rothvorwerk, II. I^b.
Ernst Hermann Wachsmuth aus Eulendorf, III. I. (Widmeten sich der Landwirthschaft.)
Friedrich Hermann Böttger aus Frauendorf, III. I.
Friedrich Edgar Teichler aus Sebnitz, III. II.
Alphons Heinrich Weber aus Leipzig, II. I^b.
Friedrich Hugo Lehmann aus Ziegra, II. I.
Wilhelm Reinhold Semmig aus Grosszössen, III^b. I.
Karl Ludwig Steyer aus Naundorf, II. I.
Oskar Theodor Rötzschke aus Zwenckau, I^b. I.
Louis Emil Mahla aus Remse, II. I. (Ging zur Papierfabrikation über.)
Karl Friedrich Reichel aus Grüna, II. II^b. (Widmete sich der Bleicherei.)
Karl Georg Fröhlich aus Warnsdorf, I^b. I.
Hermann Jungmichl aus Warnsdorf, II. I^b. (Widmeten sich dem Zeugdruck.)
Sigmund Altschul aus Leipa, II^b. I^b.
Friedrich Gustav Hippe aus Dresden, II^b. I.
Ernst Louis Köhler aus Zwönitz, II. I^b. (Hatten bereits als Seifensieder gelernt.)

Was den Beruf anbetrifft, welchen die theils am Schlusse des vorigen, theils im Laufe des letzten Schuljahres von der Gewerbschule abgegangenen Schüler gewählt haben, so ist derselbe für diejenigen Schüler, welche um Ostern 1859 den Cursus der Anstalt vollständig absolvirt hatten, im Vorstehenden bereits angegeben. Bei den nachfolgenden Angaben über den Beruf oder den weiteren Bildungsgang der sonst noch von der Gewerbschule abgegangenen Schüler sind nur diejenigen berücksichtigt, welche an dem vollen Classencursus Theil nahmen.

Ein im Laufe des Schuljahres aus der ersten Classe abgegangener Schüler wollte sich der Baumwollspinnerei widmen.

Von den 7 Schülern, welche, ohne den Cursus vollständig absolvirt zu haben, theils um Ostern v. J., theils im Laufe des Schuljahres aus der zweiten Classe austraten, ging einer zur polytechnischen Schule in Dresden ab, 3 widmeten sich der Landwirthschaft, je einer dem Maschinenbau und der Eisengiesserei und einer wurde der Anstalt durch den Tod entrissen.

Von den 20 Schülern, welche theils um Ostern v. J., theils im Laufe des Schuljahres aus der dritten Classe abgingen, widmeten sich 8 der Landwirthschaft, 2 dem Baufach und je einer dem Maschinenbau, dem Postfach und dem Handlungsfach, einer wollte Bergmann, einer Glaser werden, einer ging zur polytechnischen Schule in Dresden und einer zur Universität in Leipzig ab, einer wollte die polytechnische Schule in Kopenhagen besuchen und 2 traten in die mechanische Baugewerken- und Werkmeisterschule ein.

Von den 30 Schülern, welche theils um Ostern v. J., theils im Laufe des Schuljahres aus der vierten Classe abgingen, hatten 9 für die Landwirthschaft, 5 für den Maschinenbau, je 2 für das Baufach und das Mühlenwesen, je einer für das Militärfach, das Handlungsfach, die Brauerei und die Spitzenfabrikation sich bestimmt, einer war Schlosser, einer hatte noch keinen Beruf gewählt, 3 gingen an die mechanische Baugewerken- und Werkmeisterschule, einer an die hiesige Handelsschule über und 2 wurden durch den Tod hinweg genommen.

Das Königliche Ministerium des Innern verlieh für das verflossene Schuljahr 12 Schülern der Gewerbschule Stipendien von 2 bis 4 Thalern monatlich, im Gesammtbetrage von 408 Thalern. 29 Gewerb- und

20 Fabrikzeichenschülern wurde der Erlass des Schulgeldes, 4 Gewerbschülern und einem Fabrikzeichenschüler eine Ermässigung desselben bewilligt. Hiernach fand bei 16,2 Proc. der Gewerbschüler und bei 43,8 Proc. der Fabrikzeichenschüler ein Erlass oder eine Ermässigung des Schulgeldes statt. Das erlassene Schulgeld beträgt im Ganzen 742 Thaler.

Die Zinsen der Evans-Stiftung wurden in dem verflossenen Jahre nicht ausgegeben, sondern dem Capital hinzugefügt, welches sich dadurch auf 405 Thlr. 28 Ngr. 8 Pf. vermehrte.

Am Schlusse des Cursus zu Ostern v. J. wurden an Schüler der Baugewerkenschule folgende Auszeichnungen verliehen:

die silberne Preismedaille an

August Ludwig Gaepel aus Lübeck;

die bronzene Preismedaille an

Johannes Christian Kindermann aus Lübeck und
Friedrich Wilhelm Schwartzkopf aus Lübeck;

das Belobungsdecret an

Karl Heinrich Beyer aus Naundorf.

Der Lehrcursus 1859—60 wurde an der Baugewerkenschule am 5. October eröffnet, nachdem am 3. October die Aufnahme-Prüfung stattgefunden hatte. Zu derselben hatten sich 23 Schüler eingefunden, von denen 19 in die dritte Classe aufgenommen, 4 dagegen wegen zu geringer Vorbildung zurückgewiesen wurden. Ausserdem traten noch 4 Schüler, welche früher bereits an der Gewerbschule gewesen waren und deshalb der Aufnahme-Prüfung nicht beiwohnten, in die dritte Classe der Baugewerkenschule ein, so dass im Ganzen 23 neue Schüler in dieselbe aufgenommen wurden. Die Frequenz der Baugewerkenschule betrug in dem Lehrcursus 1859—60 überhaupt:

	im Ganzen	am Schlusse des Cursus
in der ersten Classe	11	11
in der zweiten Classe	14	13
in der dritten Classe	31	27
Zusammen	56	51

Das Königliche Ministerium des Innern bewilligte für den verflossenen Cursus 3 Schülern der Baugewerkenschule Stipendien von je 3 und 3 Schülern derselben Stipendien von je 2 Thalern monatlich. Eins dieser Stipendien wurde jedoch nicht vollständig ausgezahlt, sondern dem betreffenden Schüler von einem gewissen Zeitpunkt an entzogen, weil er hinsichtlich seines Fleisses nicht mehr desselben würdig war. 11 Schülern der Baugewerkenschule wurde das Schulgeld erlassen.

Um Ostern 1859 wurden an Schüler der mechanischen Baugewerken- und Werkmeisterschule folgende Auszeichnungen ertheilt

die silberne Preismedaille an

Gottlieb Christian Rode aus Barmstedt;

die bronzene Preismedaille an

Karl August Böhringer aus Göppingen.

Nach vollständig beendetem Cursus gingen um Ostern 1859 folgende Schüler aus der ersten Classe der mechanischen Baugewerken- und Werkmeisterschule ab, mit den beigesetzten Gesammtcensuren in Kenntnissen und im Verhalten:

Hugo Balduin Bechstein aus Altenburg, Mechanikergehülfe. II^b. I.
Karl August Böhringer aus Göppingen, Maschinenbaugehülfe. I^b. I.
Karl Gottlieb Fröhlich aus Altchemnitz, Spinnereiexpedient. II. I.
Otto Julius Haase aus Thürmsdorf, Schlossergeselle. II^b. II.
Karl Franz Hahn aus Einsiedel, Spinnereiexpedient. II. I.
Friedrich August Horn aus Annaberg, Maschinenbaugehülfe. II. I.

Gottlieb Christian Rode aus Barmstedt, Maschinenbaugehülfe. I. I.
Wilhelm Zschege aus Löbnitz, Mühlenbaugehülfe. III. I^b.
Heinrich Gotthold Dietel aus Greiz, Maschinenbaugehülfe. II^b. I^b.
Johann Gottlieb Eduard Lange aus Krumbach, Maschinenbaugehülfe. II^b. I^b.
Theobald Eduard Hartmann aus New-York, Maschinenbaulehrling. II^b. II.
Hermann Johannes Zedel aus Rothenschirmbach, Maschinenbaugehülfe. III. I^b.

Um Ostern 1859 gingen ausserdem 5 Schüler aus der dritten Classe ab und es verblieben aus derselben 12 Schüler, welche nebst 3 um Ostern aufgenommenen Schülern die zweite Classe bildeten, die hiernach aus 15 Schülern bestand. Von denselben ging um Michaelis einer ab, so dass die erste Classe 14 Schüler zählte, von denen einer während des Cursus die Anstalt verliess. Bei der Aufnahme-Prüfung am 3. October 1859 wurden 18 Schüler in die dritte Classe aufgenommen, 2 dagegen wegen ungenügender Vorbildung abgewiesen; ausserdem traten beim Beginn des Wintercursus noch 3 Schüler, welche bis dahin an der Gewerbschule gewesen waren, in die dritte Classe der mechanischen Baugewerken- und Werkmeisterschule ein, so dass diese Classe 21 Schüler hatte, von denen aber 4 im Laufe des Winters wieder abgingen. Die Frequenz der mechanischen Baugewerken- und Werkmeisterschule betrug hiernach in dem Schuljahr 1859—60 im Ganzen 36 und am Schlusse desselben noch 30.

Das Königliche Ministerium des Innern verlieh einem Schüler der mechanischen Baugewerken- und Werkmeisterschule auf das verflossene Schuljahr ein Stipendium von monatlich 3 Thalern. 7 Schülern derselben wurde der Erlass des Schulgeldes bewilligt.

Lehrplan der Gewerbschule.

In dem nachstehenden Lehrplan sind unter **Abtheilung A** diejenigen Schüler der betreffenden Classe verstanden, welche einem mit Anwendung zusammengesetzterer Maschinen betriebenen Gewerbszweige sich widmen oder überhaupt sich an der Gewerbschule möglichst umfassend ausbilden wollen. Diese Schüler benutzen den Unterricht in allen vier Classen der Anstalt, der vollständige Cursus dauert also für sie 4 Jahre. Sie zerfallen in zwei Unterabtheilungen, die mit *Aa* und *Ab* bezeichnet werden. Die Unterabtheilung *Aa* bilden diejenigen Schüler, welche zu einem Zweige der mechanischen Technik, z. B. dem Maschinenbau, dem Spinnereibetriebe etc., übergehen oder überhaupt sich vorherrschend nach der mechanischen Richtung hin ausbilden, die Unterabtheilung *Ab* diejenigen, welche einem Zweige der chemischen Technik, z. B. der Kattundruckerei, der Zuckerfabrikation etc., oder überhaupt vorherrschend der Chemie sich widmen wollen.

Mit **Abtheilung B** sind diejenigen Schüler bezeichnet, welche für ein vorherrschend chemisches, nicht mit Anwendung zusammengesetzterer Maschinen betriebenes Gewerbe sich bestimmt haben oder blos für den chemischen Theil eines Gewerbes sich ausbilden wollen und deshalb an dem Unterricht über Mechanik und Maschinenlehre nicht Theil nehmen, auch mit einem geringeren Grade der Ausbildung in der Chemie sich begnügen, z. B. künftige Färber, Seifensieder, Coloristen etc. Diese Schüler benutzen nur den Unterricht in den drei unteren Classen, absolviren also ihren Lehrcursus an der Gewerbschule in drei Jahren.

Die **Abtheilung C** bilden diejenigen Schüler, welche sich der Landwirthschaft widmen wollen. Für diese Abtheilung ist der Cursus ebenfalls dreijährig.

Vierte Classe (in zwei Parallelabtheilungen IV^a und IV^b).

Gemeinschaftlicher Unterricht für alle Schüler dieser Classe.

1) **Arithmetik** (wöchentlich 6 Stunden, mit Benutzung von Tellkampf's Vorschule der Mathematik, welches Lehrbuch auch in der Geometrie, sowie bei dem mathematischen Unterricht in den folgenden Classen benutzt wird, und von Friedrich Hofmann's Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik und Algebra, 1. u. 2. Th.). Zuerst **besondere Arithmetik:** Zahlenbildung, Zahlensysteme. Rechnung mit unbenannten Zahlen (Gebrauch der Klammern, die Rechnungsarten mit ganzen und gebrochenen Zahlen.

Geometrische Proportionen). Rechnung mit benannten Zahlen (Reductionen, die vier Species, Anwendung der geometrischen Proportionen. Dreisatz, Vielsatz. Zins- und Procentrechnung. Mischungs- und Theilungsrechnung. Kettensatz. Münzrechnungen etc.). Sodann **allgemeine Arithmetik:** Die vier Grundoperationen mit Buchstabengrössen. Potenziren und Depotenziren von einfachen Ausdrücken. Quadriren und Kubiren zusammengesetzter Ausdrücke. Extrahiren der Quadrat- und Kubikwurzel aus Polynomen und aus Zahlen. Factorenzerfällung. Aufheben von algebraischen Brüchen. Rechnung mit algebraischen Brüchen. Vermischte Reductionen. Gleichungen vom ersten Grade mit einer Unbekannten. Lösung von Aufgaben zur Anwendung dieser Gleichungen. — 2) **Geometrie** (4 Stunden). Lehrsätze über Linien und Winkel, über die Congruenz der Dreiecke, über das Viereck und über Polygone, über die Sehnen, Secanten und Tangenten des Kreises, über zwei Kreise, über Winkel im Kreise, über reguläre Polygone, über die Aehnlichkeit der Dreiecke, über Linien im Dreiecke, über die Aehnlichkeit der Vielecke, über Linien im und am Kreise. Bestimmung des Umfangs regulärer Polygone und des Kreises. Lehrsätze über die Gleichheit und über die Verhältnisse der Flächenräume, über die Inhaltsbestimmung der Figuren. — 3) **Physik** (4 Stunden, mit Benutzung von Müller's Grundriss der Physik). Allgemeine Einleitung in die Naturlehre, Abriss der Astronomie, der physischen Geographie und der Klimatologie, die Lehre von der Wärme, dem Magnetismus und der Elektricität. — 4) **Naturgeschichte** (4 Stunden). Im Sommerhalbjahr allgemeine und specielle Botanik mit besonderer Berücksichtigung der für die Praxis wichtigen Pflanzen, Anleitung zur Untersuchung und Bestimmung von Pflanzen an lebenden Exemplaren; im Winterhalbjahr allgemeine Zoologie mit specieller Berücksichtigung der Anatomie und Physiologie der Säugethiere. — 5) **Freies Handzeichnen** (6 Stunden), nach geometrischen Körpern, Gypsmodellen u. s. w. nach der Lehrmethode von Dupuis; Ausführung in Bleistift oder Kreide, vorzüglich in Contouren. — 6) **Geometrisches Zeichnen** (4 Stunden). Darstellungen in der Ebene nach gegebenen Maassen; Darstellungen von Körpern zwischen zwei Projectionsebenen in verschiedener Stellung, einzeln oder mit einander combinirt; Schraubenconstructionen. Mit den Darstellungen sind immer die entsprechenden Tuschübungen verbunden. — 7) **Deutsche Sprache** (4 Stunden, nach Götzinger's deutscher Sprachlehre für Schulen). In Cl. IV^b, in welche Abtheilung namentlich diejenigen Schüler aufgenommen werden, die in der Orthographie noch zurück sind, sind wöchentlich 2 Stunden zu orthographischen und stylistischen Uebungen bestimmt, während eine Stunde zu Uebungen im mündlichen Vortrage und eine zu dem grammatischen Unterricht verwendet wird. In Cl. IV^a, in welcher die Schüler durchgehends besser vorgebildet sind, 2 Stunden Grammatik (Laut- und Wortlehre), eine Stunde Uebungen im mündlichen, eine im schriftlichen Gedankenausdruck.

Dritte Classe.

a. Gemeinschaftlich für alle Schüler dieser Classe.

8) **Physik** (3 Stunden, mit Benutzung von Müller's Grundriss). Akustik; Optik; die mechanischen Lehren der Physik in Bezug auf starre, tropfbarflüssige und luftförmige Körper. Für die Abtheilungen *A* und *B* besteht ausserdem noch ein Unterricht über Physik von wöchentlich einer Stunde, in welchem manche physikalische Lehren ausführlicher mathematisch begründet und physikalische Aufgaben gelöst werden. — 9) **Allgemeine Chemie** (5 Stunden). Anorganische Chemie: Chemische Grundbegriffe; Stöchiometrie; Abhandlung der einzelnen Grundstoffe und ihrer wichtigeren Verbindungen, mit steter, jedoch nur andeutungsweiser Berücksichtigung der Beziehungen, in denen dieselben zum praktischen Leben stehen, überall unterstützt durch die geeigneten Experimente und durch Vorzeigen der betreffenden Stoffe. Organische Chemie: Abhandlung der wichtigeren Pflanzen- und Thierstoffe (Pflanzenfaser, Stärke, Zucker, organische Säuren und Basen, Oele, Fette, Harze, Farbstoffe, Knochen, Fleisch, Blut, Milch, Harn u. s. w.) und ihrer Zersetzungsproducte (Producte der Gährung, der trocknen Destillation u. s. w.) hinsichtlich ihrer Eigenschaften, Gewinnung und Benutzung, wie auch nach ihren Beziehungen zu dem lebenden Pflanzen- und Thierkörper. — 10) **Bauwissenschaft** (2 Stunden). Darstellung der Grundregeln für alle Bauführungen; Hauptverbindungen; die Haupttheile der Gebäude, die Anlage und Eintheilung derselben; Construction der Feuerungen, der Backöfen, Ziegelöfen, Kalköfen, Malzdarren u. s. w. — 11) **Deutsche Sprache** (4 Stunden, nach Götzinger). 2 Stunden Grammatik (Satz- und Styllehre, nebst der Lehre von den Satzzeichen, nach Befinden das

Wichtigste aus der Verslehre), 2 Stunden mündliche und schriftliche Uebungen, und, damit abwechselnd, Lectüre einer dramatischen Dichtung. Die minder geübten Schüler der Classe haben ausserdem noch 2 Stunden wöchentlich orthographische und Leseübungen. — 12) **Kaufmännisches Rechnen** (2 Stunden, für die Abtheilung *C* blos im Winterhalbjahr in einem besondern Cursus).

b. Für Abtheilung *A.*

13) **Arithmetik** (4 Stunden). Gleichungen des ersten Grades mit mehreren Unbekannten, diophantische Aufgaben, Gleichungen vom zweiten Grade, Potenzen, Logarithmen, logarithmische Gleichungen, arithmetische und geometrische Reihen, Zinseszinsrechnung. — 14) **Geometrie** (4 Stunden). Stereometrie, ebene Trigonometrie, Anwendung der Algebra auf die Geometrie. — 15) **Darstellende Geometrie** (Projectionslehre). (6 Stunden, für III. *Ab* blos im Sommerhalbjahr). Parallel-Projection. *A*) Ebenflächige Raumformen: Darstellung der geometrischen Grundgebilde und Anwendung derselben zur Lösung von Aufgaben. Ableitung wahrer Grössen- und Lagen-Elemente aus Parallel-Projectionen. Ableitung richtiger Parallel-Projectionen zu gegebenen Elementen der Grösse und Lage. Anwendungen auf die dreiseitige Ecke, die ebenflächigen Körper und ihre Verbindungen. Veränderung des Projectionssystems. Axonometrische Projection. *B*) Krumme Oberflächen und doppelt gekrümmte Curven. Darstellung der Kegelflächen. Kegel- und Cylinder-Flächen. Geometrische Theorie der Kegelschnitte. 16) **Freies Handzeichnen** (4 Stunden), wie in Classe IV, jedoch Uebergang zur Ausarbeitung der Zeichnungen mit gehöriger Vertheilung von Licht und Schatten. — Die Abtheilung *Ab* betheiligt sich ausserdem während des Winterhalbjahrs in wöchentlich 4 Stunden an dem Unterricht Nr. 18.

c. Für Abtheilung *B.*

17) **Mechanische Technologie** (2 Stunden, nach dem Handbuch der mechanischen Technologie von Karmarsch). Erster Theil des zweijährigen Cursus, welcher die Gewinnung und Verarbeitung der Metalle, die Verarbeitung des Holzes und die der spinn- und webbaren Fasern als hauptsächlichste Unterrichtsgegenstände umfasst. — 18) **Praktisch-chemische Arbeiten** im Laboratorium (4—8 Stunden während des Winterhalbjahrs). Uebungen in der Ausführung chemischer Operationen im Allgemeinen; Darstellung und Untersuchung der für die Gewerbe wichtigen Stoffe; Uebungen in der analytischen Chemie. Die Arbeiten, zu denen die Materialien und Apparate von der Anstalt geliefert werden, werden für jeden Schüler nach Maassgabe seiner Kenntnisse und seines künftigen Berufs ausgewählt. Ueber die ausgeführten Arbeiten führen die Schüler ein Protokoll. — Ausserdem betheiligt sich die Abtheilung *B* an dem Unterricht Nr. 13 und 14 und während des Sommerhalbjahrs an dem Unterricht Nr. 16.

d. Für Abtheilung *C.*

19) **Arithmetik** (2 Stunden). Gleichungen des ersten Grades mit mehreren Unbekannten, Gleichungen vom zweiten Grade, Potenzen, Logarithmen, arithmetische und geometrische Progressionen, Zinseszinsrechnung. — 20) **Geometrie** (2 Stunden). Ebene Trigonometrie, Stereometrie. — 21) **Naturgeschichte** (4 Stunden). Im Sommerhalbjahr Anatomie und Physiologie der Pflanzen nebst einem Abriss der Pflanzengeographie, specielle Botanik mit besonderer Berücksichtigung der für die Landwirthschaft wichtigen Pflanzen, botanische Excursionen; im Winterhalbjahr specielle Zoologie mit besonderer Rücksicht auf die für die Landwirthschaft wichtigen Thiere. — 22) **Viehzucht** (2 Stunden). Allgemeiner Theil. Anatomische und physiologische Einleitung; Gesundheitspflege; die Lehre von der Züchtung, Ernährung und Erhaltung der Thiere. — 23) **Pflanzenbaulehre** (2 Stunden im Sommerhalbjahr). Allgemeiner Theil. Einfluss des Klimas und Bodens auf die Entwickelung der Culturpflanzen; Erzeugung, Fortpflanzung und Krankheiten derselben; Culturmittel, Saat, Pflege, Ernte und Aufbewahrung. — 24) **Maschinenzeichnen** (im Sommerhalbjahr 2, im Winterhalbjahr 4 Stunden). Zeichnen landwirthschaftlicher Geräthe und Maschinen. — Ausserdem haben die Schüler dieser Abtheilung im Sommerhalbjahr in wöchentlich 2 Stunden Unterricht im freien Handzeichnen und betheiligen sich an den Unterrichtsgegenständen Nr. 32 und 33, sowie, bei guter Vorbildung in der Chemie, während des Winterhalbjahrs in wöchentlich 4 Stunden an dem Unterricht Nr. 18.

Zweite Classe.

a. Gemeinschaftlich für alle Schüler dieser Classe.

25) **Deutsche Sprache** (4 Stunden). 2 Stunden deutsche Literaturgeschichte, 1 Stunde Uebungen im freien Vortrage, verbunden mit mündlicher und schriftlicher Beurtheilung der Leistungen, sowie mit Anfertigung von Protokollen, 1 Stunde Denklehre nebst Anleitung zur Anfertigung der Abhandlung und Rede. — 26) **Architektonisches Zeichnen** (2 Stunden, für die Abtheilungen *B* und *C* nach Befinden blos während eines halben Jahres). Uebung im Zeichnen architektonischer Details, im Copiren und Entwerfen von Bauplänen.

b. Für Abtheilung *A.*

27) **Analysis** (4 Stunden, für *Ab* blos während des Sommerhalbjahres). Figurirte Zahlen, höhere arithmetische Reihen, Gleichungen des dritten Grades, Combinationslehre, Grenzwerthbestimmung und Quadratur der Functionen, Binomial-, Exponential-, logarithmische, goniometrische und cyklometrische Reihen, Taylor's Reihe, Bestimmung des Werthes $\frac{0}{0}$, grösste und kleinste Werthe der Functionen, Methode der kleinsten Quadrate. — 28) **Sphärische Trigonometrie** und **analytische Geometrie der Ebene** (3 Stunden, blos für *Aa*). — 29) **Mechanik** (5 Stunden). Die Lehre vom Gleichgewicht und der Bewegung fester, tropfbarflüssiger und luftförmiger Körper, in solcher Ausführlichkeit, wie die spätere Anwendung in der Maschinenlehre sie verlangt. — 30) **Maschinenzeichnen** (im Sommerhalbjahr 6, im Winterhalbjahr 4 Stunden). Mechanisch-geometrische Constructionen (Verzahnungen, Geradführungen u. s. w.), Zeichnen von Maschinentheilen und einfacheren Bewegungs- und ausübenden Maschinen nach Modellen, nach Skizzen mit eingeschriebenen Maassen und nach Vorlegeblättern. — 31) **Darstellende Geometrie** (Projectionslehre) (2 Stunden, blos für *Aa*). Die windschiefen Regelflächen; die Umdrehungs-Oberflächen; Anwendung der vorhergehenden Theorien auf die geometrische Construction der Schatten. Central-Projection. *A*) Ebenflächige Raumformen (nach demselben Gange wie in Cl. III. Parallel-Projection *A*). — 32) **Praktische Geometrie** und 33) **Planzeichnen.** (Im Sommerhalbjahr wöchentlich einen Nachmittag praktische Uebungen im Feldmessen, im Winterhalbjahr 2 Stunden Vortrag über praktische Geometrie und 2 Stunden Planzeichnen.) Aufnehmen mit Kette und Messtisch, der Boussole; Nivelliren; Abtragen, Berechnen und Theilen der Vermessungen; barometrisches Höhenmessen. Die Uebungen werden von den Schülern gruppenweise zu Vier bis Fünf vollzogen, unter Benutzung der Instrumente der Anstalt, und bestehen hauptsächlich in Aufnahmen abgegrenzter, nicht allzu umfänglicher Grundstücke, in Verbindung mit Nivellements zur Darstellung von Erdprofilen u. s. w. Das Planzeichnen umfasst hauptsächlich die graphische Darstellung von Ländereien und es erfolgt bei diesem Unterricht zugleich die Ausführung und das Copiren der während des Sommers vollendeten Aufnahmen. Für die Schüler der Unterabtheilung *Ab* ist dieser Unterricht facultativ. — 34) **Freies Handzeichnen** (2—4 Stunden), theils nach Gypsmodellen, theils nach Vorlegeblättern, mit genauerer Ausführung in Kreide oder Tusche. Ausserdem betheiligt sich die Abtheilung *A* an dem Unterricht Nr. 17 und die Unterabtheilung *Ab* auch an dem Unterricht Nr. 37. Die Unterabtheilung *Aa* nimmt ferner in wöchentlich 2 und die Unterabtheilung *Ab* in wöchentlich 6 Stunden an dem Unterricht über **technische Chemie** (Nr. 35) Theil. In denjenigen Stunden dieses Unterrichts, welche auch die Schüler der Unterabtheilung *Aa* besuchen, findet eine nochmalige repetitionsweise, jedoch weiter ausgeführte Betrachtung der in praktischer Beziehung wichtigen Elemente und Verbindungen in Bezug auf Vorkommen, hauptsächliche Eigenschaften und Reactionen, Anwendungen und Princip der Gewinnung statt; ausserdem werden in diesen Stunden in technisch-chemischer Beziehung namentlich die Brennmaterialien, das Beleuchtungswesen, das Wasser, die Fabrikation des Glases und der Thonwaaren und die Gewinnung der wichtigsten Schwermetalle abgehandelt. Die Unterabtheilung *Ab* betheiligt sich ausserdem, unter Verringerung der Unterrichtsstunden von Nr. 30 und nach Befinden unter Wegfall des Unterrichts Nr. 34, in wöchentlich 8 Stunden an den **praktisch-chemischen Arbeiten** (Nr. 36).

c. Für Abtheilung *B.*

35) **Technische Chemie** (6 Stunden). Das ganze Gebiet der Chemie wird hier nochmals durchgegangen, und dabei darauf hingewirkt, das chemische Wissen und das chemische Urtheil der Schüler nach allen Seiten hin zu befestigen und zu erweitern; zugleich wird das für die Anwendung Wichtige vorzugsweise

berücksichtigt und eine Darstellung der wichtigeren chemischen Fabrikationen und vorherrschend auf chemischen Principien beruhenden Gewerbe gegeben, indem diese bei Abhandlung der betreffenden Stoffe, z. B. die Thonwaarenfabrikation bei der Thonerde, die Färberei und Druckerei bei den Farbstoffen u. s. w., eingeschaltet wird. Ausserdem werden bei diesem Unterricht die hauptsächlichsten Waaren und Producte (z. B. Brennstoffe, Färbematerialien, Nahrungsstoffe u. s. w.) an passender Stelle mit abgehandelt. — 36) **Praktisch-chemische Arbeiten** im Laboratorium (12 Stunden), wie in Classe III, nur mit speciellerer Auswahl der Arbeiten je nach dem Beruf der einzelnen Schüler. — Ausserdem betheiligen sich die Schüler dieser Abtheilung an Nr. 17 und facultativ an Nr. 30 und 34. — 37) **Mineralogie** und **Geognosie** (2 Stunden). Im Sommerhalbjahr Mineralogie, im Winterhalbjahr Geognosie, beide mit specieller Berücksichtigung ihrer Beziehungen zu der Landwirthschaft und den Gewerben abgehandelt.

d. Für Abtheilung *C.*

38) **Boden- und Düngerlehre** (2 Stunden). Betrachtung des Bodens und der verschiedenen auf seine Beschaffenheit Einfluss habenden Umstände; Classification der Bodenarten, mit besonderer Berücksichtigung des für die sächsische Grundsteuerabschätzung angenommenen Modus; Betrachtung der natürlichen und künstlichen Düngestoffe, ihrer Wirkung und Anwendung. — 39) **Pflanzenbaulehre** (im Sommerhalbjahr 3, im Winterhalbjahr 2 Stunden). Specieller Theil. Die Lehre von dem Anbau der Nutzpflanzen im Einzelnen, mit Einschluss des Wiesenbaues, des Weinbaues und der Obstbaumzucht, nebst einem kurzen Abriss des Waldbaues. — 40) **Viehzucht** (2 Stunden). Specieller Theil. Die Rindvieh-, Pferde-, Schaf- und Schweinezucht, und, in minderer Ausführlichkeit, die Ziegen-, Federvieh-, Fisch-, Seidenraupen- und Bienenzucht. — 41) **Landwirthschaftliche Maschinenlehre** (2 Stunden). Betrachtung der landwirthschaftlichen Werkzeuge, Geräthe und Maschinen, ihrer Anwendungs- und Wirkungsweise u. s. w. — 42) **Landwirthschaftliche Betriebslehre** (3 Stunden). Betriebslehre im Allgemeinen; Erfordernisse des Betriebes; Einrichtung und Führung der Wirthschaft. Landwirthschaftliche Buchführung. Landwirthschaftliche Taxationskunde. — 43) **Landwirthschaftliche Baukunde** (1 Stunde im Winterhalbjahr). Regeln für die Einrichtung der landwirthschaftlichen Wohngebäude, der Scheunen, Ställe u. s. w. — 44) **Landwirthschaftliche Excursionen** in Begleitung des Lehrers der Landwirthschaft und **Culturversuche** in dem Versuchs-Garten der Anstalt unter der Leitung desselben. Die hierauf zu verwendende Stundenzahl ist nicht fest bestimmt, sondern richtet sich nach dem vorliegenden Bedürfniss, der Witterung u. s. w., und es werden nach Befinden auch die landwirthschaftlichen Lehrstunden selbst zum Theil mit dazu verwendet. — 45) **Maschinenkunde** und **Technologie** (2 Stunden). Beschreibung der hauptsächlichsten Motoren und Maschinentheile, sowie der Verarbeitung des Holzes und des Eisens. — 46) **Landwirthschaftliche Chemie** (Agricultur-Chemie). (2 Stunden.) Betrachtung des Bodens, der Düngestoffe, der Culturpflanzen u. s. w. in chemischer Beziehung. — Ausserdem betheiligen sich die Schüler dieser Abtheilung an dem Unterricht Nr. 37, ferner nochmals an dem Unterricht Nr. 32, sowie, im Sommerhalbjahr in 4, im Winterhalbjahr in 4 bis 8 Stunden, an den praktisch-chemischen Arbeiten (Nr. 36), bei denen sie vorzüglich mit Untersuchung von Bodenarten, Düngestoffen, landwirthschaftlich wichtigen Pflanzen u. s. w. sich beschäftigen. Ferner nehmen dieselben in wöchentlich 3 Stunden an dem Unterricht Nr. 35 Theil, wobei sie mit denjenigen Grundstoffen und Verbindungen, welche für den Landwirth von besonderer Wichtigkeit sind, specieller bekannt gemacht, und ihnen zugleich die landwirthschaftlich-chemischen Gewerbe, wie Branntweinbrennerei, Bierbrauerei u. s. w., vorgetragen werden.

Erste Classe.

Für Abtheilung *A* (aus welcher allein diese Classe besteht).

47) **Maschinenlehre** (8 Stunden). Ueber Maschinen und Maschinenbau im Allgemeinen; Maschinentheile zum Stützen, zum Fortleiten, Verändern und Reguliren der Bewegung, namentlich mit Rücksicht auf Fabrikationsmaschinen; vom Messen der bewegenden Kräfte und ihrer Wirkungen; Maschinen zur Aufnahme der bewegenden Kraft des Menschen, der Thiere, des Wassers, Dampfes und Windes; die am häufigsten vorkommenden Arbeitsmaschinen; Statik der Baukunst. — 48) **Maschinenzeichnen** (8 Stunden für *Aa*,

4 Stunden für *Ab*). Entwerfen von Maschinentheilen und einfacheren Maschinen. — 49) **Mathematik** (3 Stunden, blos für *Aa*). Theorie der höheren Gleichungen, analytische Geometrie des Raumes, mathematische Uebungen. — 50) **Darstellende Geometrie** (2 Stunden, blos für *Aa*). *B*) Central-Projection der Regelflächen und Umdrehungs-Oberflächen. Schatten. Allgemeine mathematische Theorie der Projections-Methoden als Darstellung verwandter räumlicher Systeme. Basreliefperspective. — **Mineralogie** und **Geognosie** (Nr. 37), blos für *Aa*. — **Technische Chemie** (Nr. 35). An diesem Unterricht, den die Schüler der Abtheilung *Ab* schon in der zweiten Classe vollständig absolvirt haben, betheiligen sich nur die Schüler der Abtheilung *Aa*, und zwar in zwei Stunden während des Sommerhalbjahres. Dieser Unterricht bildet für dieselben eine Fortsetzung des entsprechenden Unterrichts der zweiten Classe. — 51) **Analytische** und **theoretische Chemie** (3 Stunden, blos für *Ab*). In diesem Unterricht wird die qualitative Analyse repetitionell und ergänzend, die quantitative Gewichtsanalyse und die Volumetrie aber eingehender behandelt. Ferner werden die Schüler durch denselben weiter in das Gebiet der rein theoretischen Chemie eingeführt, indem das Speciellere über die Aufstellung der Atomgewichte, über die Beziehungen derselben zur Krystallform, zum Volum und specifischen Gewicht u. s. w. vorgetragen und auf die theoretischen Theile der organischen Chemie näher eingegangen wird. — **Praktisch-chemische Arbeiten** (Nr. 36). An diesem Unterricht nehmen die Schüler der Abtheilung *Ab* durchgehends in wöchentlich 12 Stunden Theil; die Schüler der Abtheilung *Aa* betheiligen sich an demselben im Sommerhalbjahr in 2 bis 4, im Winterhalbjahr in 4 Stunden wöchentlich. — Die Schüler der ersten Classe nehmen ferner noch Theil an den Uebungen in deutscher Sprache (Nr. 25) in wöchentlich 2 Stunden, sowie an den Unterrichtsgegenständen Nr. 17, 26 (in der Regel nur im Sommerhalbjahr) und 34 (in der Regel nur *Aa* in 2 Stunden), und facultativ an Nr. 32.

Ausserdem ist den Schülern der Gewerbschule Gelegenheit geboten, sich an folgenden Unterrichtsgegenständen zu betheiligen:

52—55) **Französischer Sprachunterricht.** Derselbe wird in 4 Classen, wöchentlich zu je 3 Stunden, ertheilt; die Schüler werden in diejenige Classe aufgenommen, für welche sie sich ihrer Vorbildung nach am besten eignen. — 56—59) **Englischer Sprachunterricht.** Derselbe wird in 4 Classen, wöchentlich zu je 3 Stunden, ertheilt, in welche die betreffenden Schüler ebenfalls nach Maassgabe ihrer Vorbildung eingereiht werden. — 60) **Kaufmännische Buchführung** und **Correspondenz** (3 Stunden). — 61) **Unterricht im Bossiren** in Thon (einen Nachmittag in jeder Woche).

Zur Nachhülfe wird in wöchentlich 4 Stunden in der vierten Classe 62) ein Unterricht über **Geographie** und **Geschichte** ertheilt, welchem beizuwohnen den in diesen Fächern nicht genügend vorbereitet eintretenden Schülern zur Pflicht gemacht wird.

An der Gewerbschule besteht ausserdem noch 63—64) der **Fabrikzeichenunterricht,** welcher zunächst für solche, die in Fabriken oder Werkstätten zu Chemnitz als Lehrlinge oder Gehülfen fungiren, bestimmt ist, an welchem jedoch auch eigentliche Schüler der Gewerbschule Theil nehmen können. Derselbe wird in zwei Classen, einer oberen und einer unteren, in je 4 Stunden wöchentlich zur Abendzeit ertheilt. Der Unterricht in der unteren Abtheilung bezweckt, den Schülern Fertigkeit im Zeichnen im Allgemeinen beizubringen; der Unterricht in der oberen Abtheilung hat die Aufgabe, denselben im Zeichnen und Entwerfen von auf ihr specielles Fach Bezug habenden Ornamenten, und namentlich solchen, die sich zu Musterzeichnern für Weberei und Druckerei ausbilden wollen, im Zeichnen und Entwerfen von Mustern Anleitung zu geben.

Die Schüler der ersten Classe der Gewerbschule können auch an dem an der mechanischen Baugewerken und Werkmeisterschule bestehenden Unterricht über **Mühlenbau** und **Spinnerei** Theil nehmen.

Lehrplan der Baugewerkenschule.

Dritte Classe.

Allgemeine Baukunde (4 Stunden). Baumaterialienlehre; Betrachtung der einzelnen Theile von Bauwerken und Gebäuden; Anordnung der Gebäude im Allgemeinen in Beziehung auf Zweckmässigkeit, Festigkeit und Schönheit. — **Architektonisches Zeichnen** (6 Stunden). Zeichnen von Bautheilen, wie Gesimse, Thüren, Fenster etc. — **Ornamentenzeichnen** (2 Stunden). Bei diesem Unterricht wird die Dupuis'sche Methode in vereinfachter Form angewendet und mittelst derselben den Schülern zunächst eine gewisse Fertigkeit im Zeichnen im Allgemeinen beigebracht. Sodann folgt das Zeichnen einfacherer Ornamente in Umrissen. — **Projectionslehre** (4 Stunden). Projection von Linien, Flächen und Körpern, von Körperschnitten und- Durchdringungen; Schattenconstructionen. — **Arithmetik** (7 Stunden). Die vier Grundoperationen mit ganzen Zahlen, gemeinen und Decimalbrüchen und mit benannten Zahlen. Die bürgerlichen Rechnungsarten (einfache und zusammengesetzte Regel de tri, Gesellschaftsrechnung u. s. w.). Die vier Grundoperationen mit allgemeinen Grössen; Ausziehen der Quadrat- und Cubikwurzel; Gleichungen des ersten Grades mit einer und mit mehreren Unbekannten; quadratische Gleichungen. — **Geometrie** (5 Stunden). Die wichtigsten Sätze über Congruenz, Gleichheit und Aehnlichkeit ebener geradliniger Figuren. Die Lehre vom Kreise. Inhaltsbestimmung von Flächen. Die wichtigsten stereometrischen Lehrsätze, mit besonderer Berücksichtigung der Bestimmung des Inhalts von Körpern. — **Physik** (4 Stunden). Allgemeine Eigenschaften der Körper; die verschiedenen Aggregatzustände; das Wichtigste aus der Lehre von der Wärme, dem Licht und der Elektricität. — **Deutsche Sprache** (4 Stunden). Praktische Uebungen im mündlichen und schriftlichen Gedankenausdruck. Orthographie. Die wichtigsten Theile der Wort- und Satzlehre. Die Wortclassen, Bildung und Beugung der Substantive, Adjective und Verben, Declination der Fürwörter, Anwendung der Präpositionen. Der nackte und bekleidete Satz, die Nebensätze nach Form und Inhalt, die Kürzung derselben.

Zweite Classe.

Allgemeine Baukunde (2 Stunden). Specielle Betrachtung der landwirthschaftlichen Bauanlagen. — **Mauerkunst** (4 Stunden). Specielle Betrachtung der Stein-Constructionen und der damit in Verbindung stehenden Erd- und Wasserbau-Arbeiten. — **Zimmerkunst** (4 Stunden). Specielle Betrachtung der Holz-Constructionen. — **Entwerfen von Bauplänen** (6 Stunden). Uebung in der Anfertigung einfacherer Entwürfe, mit specieller Berücksichtigung der ländlichen Gebäude. — **Architektonisches Zeichnen** (6 Stunden). Uebung im Darstellen von Bauplänen unter Benutzung geeigneter Vorlagen. — **Projectionslehre** (2 Stunden). Fortsetzung der Schattenconstructionen. Isometrische Projectionen und Zeichnen nach Modellen. Steinschnitt. — **Ornamentenzeichnen** (4 Stunden). Fortsetzung des entsprechenden Unterrichts der dritten Classe, mit geeigneter Auswahl der Vorlagen, so dass die Schüler mit den hauptsächlichsten Stylen der Ornamentik bekannt werden. Zeichnen theils nach Gypsmodellen, theils nach Vorlegeblättern, mit genauerer Ausführung in Kreide oder Tusche. — **Mechanik** (4 Stunden). Das Wichtigste über die trigonometrischen Functionen und die Logarithmen. Die Hauptsätze über Gleichgewicht und Bewegung der Körper mit specieller Anwendung auf das Baufach. Festigkeiten der Körper. — **Perspective** (2 Stunden). Entwickelung der wichtigsten Lehrsätze der Perspective; Darstellung von Flächen, Körpern und Räumen mit Benutzung von Abkürzungsmethoden. Anwendung der Lehrsätze über Spiegelung, Licht und Schatten an einfachen Körpern. — **Deutsche Sprache** (2 Stunden). Fortsetzung der in der dritten Classe begonnenen Uebungen, mit besonderer Berücksichtigung der Geschäftsaufsätze. Weitere Behandlung der Satzlehre.

Erste Classe.

Constructionslehre (4 Stunden) für Maurer, Zimmerer und Steinmetzen. Fortsetzung des Unterrichts über Mauer- und Zimmerkunst in der zweiten Classe, unter Berücksichtigung der Ausbauarbeiten, der Feuerungsanlagen, des Steinschnittes, der Holz- und Steinconstructionen in Verbindung mit Eisen und der statischen Untersuchungen an Bauwerken und Gebäuden. — **Entwerfen von Bauplänen** (8 Stunden). Anweisung zur Fertigung von Baurissen. — **Anfertigung von Bauanschlägen** (2 Stunden). Anweisung zur Veranschlagung projectirter Baupläne. — **Architektonisches Zeichnen** (4 Stunden). Freie Uebung im Darstellen der Baupläne unter Benutzung geeigneter Vorlagen. — **Modelliren** (4 Stunden) für Maurer an Gewölb- und Treppentheilen, Feuerungsanlagen u. s. w., für Steinmetzen an Steinschnittarbeiten, für Zimmerer an Wand-, Dach-, Balkenverbindungen u. s. w. — **Ornamentenzeichnen** (4 Stunden) Fortsetzung des betreffenden Unterrichts der zweiten Classe. — **Bossiren** von Ornamenten in Thon, theils nach Modellen, theils nach Zeichnungen (2 Stunden). — **Mechanik** (2 Stunden). Wirkung der Kräfte auf Holz- und Steinverbindungen. Die Hauptsätze der Hydrostatik und Hydraulik mit steter Rücksicht auf die im Baufach in Anwendung kommenden Maschinen. — **Perspective** (2 Stunden). Freie Uebung in perspectivischer Darstellung gegebener Bauanlagen und selbstgefertigter Entwürfe. — **Deutsche Sprache** (2 Stunden). Anleitung zur Anfertigung grösserer Aufsätze mit besonderer Berücksichtigung der Disposition. Einfache gewerbliche Buchführung. Nach Umständen kurze Uebersicht über die bedeutendsten Erscheinungen der deutschen Literatur.

Lehrplan der mechanischen Baugewerken- und Werkmeisterschule.

Dritte Classe.

Arithmetik (7 Stunden), **Geometrie** (5 Stunden), **Physik** (4 Stunden) und **deutsche Sprache** (4 Stunden) wie in der dritten Classe der Baugewerkenschule, mit welcher die dritte Classe der mechanischen Baugewerken- und Werkmeisterschule für diese Lehrfächer combinirt ist. — **Freies Handzeichnen** (4 Stunden). Bei diesem Unterricht wird die Dupuis'sche Methode in vereinfachter Form angewendet und mittelst derselben den Schülern zunächst eine gewisse Fertigkeit im Zeichnen im Allgemeinen beigebracht. Sodann folgt das Zeichnen von Ornamenten, hauptsächlich nach Gypsmodellen. — **Geometrisches Zeichnen** und **Projectionslehre** (8 Stunden). Geometrische Linearconstructionen. Projection von Linien, Flächen, Körpern und Körperdurchdringungen, mit thunlichster Rücksicht auf Beispiele aus der praktischen Mechanik. Einige einfachere Schattenconstructionen.

Zweite Classe.

Mathematik und Mechanik (12 Stunden). Potenzrechnung, insoweit als sie zum Verständniss der Logarithmen erforderlich ist; Logarithmen; die Elemente der ebenen Trigonometrie. Die Lehre vom Gleichgewicht und der Bewegung fester, tropfbar-flüssiger und luftförmiger Körper, in elementarer Behandlung und mit Beschränkung auf dasjenige, was für die technische Anwendung besonders wichtig und für den nachfolgenden Unterricht in der Maschinenlehre nothwendig ist. — **Maschinenzeichnen** (8 Stunden). Zahnconstructionen und andere mechanisch-geometrische Constructionen. Zeichnen von Maschinentheilen und Maschinen nach Modellen, Vorlegeblättern und Skizzen mit eingeschriebenen Maassen. — **Architektonisches Zeichnen** (4 Stunden), mit besonderer Berücksichtigung der Holzverbände und Steinconstructionen. — **Feld- und Wassermessen** (4 Stunden). Abstecken und Messen gerader und krummer Linien; Handhabung der einfachsten Messinstrumente zum Aufnehmen von Teichen, Gräben u. s. w.; Nivelliren; Wassermessen durch Aichung, Schwimmer, Ueberfall u. s. w. — **Mechanische Technologie** (4 Stunden). Verarbeitung der Metalle, namentlich des Eisens, und des Holzes. — **Deutsche Sprache** (3 Stunden). Stylistische Uebungen, namentlich in Bezug auf Geschäftsaufsätze, technologische Beschreibungen u. s. w. Uebungen im freien Vortrage.

Erste Classe.

Maschinenlehre (8 Stunden). Maschinenelemente zum Stützen und Befestigen, zur Fortpflanzung, Abänderung und Regulirung der Bewegung; Kraftmaschinen; ausübende Maschinen, insoweit sie für alle Schüler von Interesse sind. — **Maschinenzeichnen** (8 Stunden). Fortsetzung des entsprechenden Unterrichts der zweiten Classe, indem bei der Auswahl der Vorlagen auf den Beruf der Schüler speciell Rücksicht genommen wird. Aufnahmen von Maschinen, Anfertigung von Werkzeichnungen. — Unterricht über *a)* **Mühlenbau** (4 Stunden) für Müller und Mühlenbauer. Teich-, Wehr- und Gräbenbau; die verschiedenen Arten von Mühlen, namentlich die Mahl-, Oel- und Sägemühlen. — *b)* **Spinnerei** und **Weberei** (je 4 Stunden) für Spinnerei- und Webereibeflissene. — *c)* **Röhrenanlage** und **Brunnenbau** (4 Stunden) für Röhr- und Brunnenmeister. Abriss der Geognosie; Brunnenbau, Erdbohren, Röhrenleitungen, Wasserhebungsmaschinen. Ausserdem Betheiligung der betreffenden Schüler an dem Anfange des unter *a)* genannten Unterrichts. — **Freies Handzeichnen** (4 Stunden). Fortsetzung des betreffenden Unterrichts der dritten Classe. — **Gewerbliche Buchführung** (2 Stunden). Dieser Unterricht hat zum Zweck, die Schüler mit den wichtigsten kaufmännischen Arbeiten, welche ihnen in ihrem künftigen Beruf vorkommen können, bekannt zu machen.

Lehrer an der Gewerbschule.

Professor Georg Heinrich Eberhard Schnedermann, Dr. phil., Director, Lehrer für allgemeine und technische Chemie.

Professor Ernst Theodor Stöckhardt, für die verschiedenen Zweige der Landwirthschaftslehre.

Professor Hermann Friedrich Theodor Ludwig, für Mathematik und Physik.

Professor Eduard Theodor Böttcher, für Maschinenlehre, Maschinenzeichnen und mechanische Technologie.

Hermann Ludwig Edmund Oberreit, für Mathematik und praktische Geometrie.

Heinrich Eduard Lamprecht, für deutsche Sprache, Geographie und Geschichte.

Christian Heinrich Terne, für freies Handzeichnen und Bossiren.

August Wilhelm Guthmann, für geometrisches Zeichnen, freies Handzeichnen und Musterzeichnen.

Otto Wilhelm Fiedler, Dr. phil., für darstellende Geometrie, praktische Geometrie und Planzeichnen.

Gustav Martin Wunder, Dr. phil., für praktisch-chemische Arbeiten, analytische und landwirthschaftliche Chemie.

Karl Emil Theophil Kluge, für Physik, Botanik, Zoologie, Mineralogie und Geognosie

Karl Eduard Zetzsche, Dr. phil., für Mathematik, Mechanik, Maschinenzeichnen und Technologie.

Emil Alwin Gottschaldt, für Bauwissenschaft und architektonisches Zeichnen.

Ernst Moritz Findeisen, Dr. phil., für kaufmännisches Rechnen und für kaufmännische Buchführung und Correspondenz.

Eduard White, für englische Sprache.

Jean David Paul Vodoz, für französische Sprache.

Anton Rudolf Otto Kersten, Assistent im Laboratorium.

Lehrer an der Baugewerkenschule.

Professor Georg Heinrich Eberhard Schnedermann, Dr. phil., Director.

Friedrich Kohl, für Physik, Mechanik und Projectionslehre.

Karl Gustav Theodor Friedrich, für Mauerkunst, Zimmerkunst, Constructionslehre, Entwerfen von Bauplänen, Anfertigung von Bauanschlägen und Modelliren.

Heinrich Eduard Lamprecht, für deutsche Sprache.

Christian Heinrich Terne, für Ornamentenzeichnen und Bossiren.

Otto Wilhelm Fiedler, Dr. phil., für Mathematik.

Emil Alwin Gottschaldt, für architektonisches Zeichnen, allgemeine Baukunde und Perspective.

Lehrer an der mechanischen Baugewerken- und Werkmeisterschule.

Professor Georg Heinrich Eberhard Schnedermann, Dr. phil., Director.

Friedrich Kohl, für geometrisches Zeichnen und Projectionslehre, Physik, mechanische Technologie, Maschinenzeichnen und Weberei.

Wilhelm August Hermann Kankelwitz, für Mathematik und Mechanik, Feld- und Wassermessen, Röhrenanlage und Brunnenbau, Mühlenbau, Spinnerei, Maschinenlehre und Maschinenzeichnen.
Heinrich Eduard Lamprecht, für deutsche Sprache.
Christian Heinrich Terne, für freies Handzeichnen.
Otto Wilhelm Fiedler, Dr. phil., für Mathematik.
Emil Alwin Gottschaldt, für architektonisches Zeichnen.
Ernst Moritz Findeisen, Dr. phil., für gewerbliche Buchführung.

Verzeichniss der Schüler.

Gewerbschule.

Classe I.

Für den vollen Classencursus:

1. Köhler, Johann Christian, aus Rochlitz.
2. Lauckner, Kurt Eduard, aus Reichenhain (abg.).
3. Matthes, Albin, aus Zschopau.
4. Matthes, Ernst Theodor Christian, aus Dorfschellenberg.
5. Menzel, Karl August, aus Chemnitz.
6. Zeissler, Johannes Richard, aus Böhlen.
7. Kretschmann, Paul Heinrich, aus Leipzig.
8. Pohl, Georg Alexander, aus Schneeberg.
9. Höhn, August Eduard Wilhelm, aus Thalbürgel.
10. Pommer, Theodor Friedrich, aus Chemnitz.
11. Noth, Friedrich Julius, aus Ottendorf.

Classe II.

Für den vollen Classencursus:

1. Uhlig, Friedrich Wilhelm, aus Schönau.
2. Clemens, Karl Theodor, aus Seifhennersdorf.
3. Gräfe, Julius, aus Beiern.
4. Graichen, Arthur Bruno, aus Burgishain.
5. Hermsdorf, Friedrich Alwin, aus Pöhla (gestorben).
6. Hübner, Karl August Wilhelm, aus Seifhennersdorf.
7. Jäger, Friedrich Theodor Felix, aus Liebschwitz.
8. Kappes, Robert Emil, aus Leipzig.
9. Lange, Heinrich Hugo, aus Eilenburg.
10. Mehlhorn, Franz Heinrich, aus Oberschlema.
11. Mietzsch, Ernst Emil, aus Grosssteinberg.
12. Morgenstern, Karl Friedrich, aus Chemnitz.
13. Müller, Ernst Julius, aus Taura.
14. Müller, Franz Louis, aus Greiz.
15. Müller, Oskar, aus Hoheneck.
16. Müller, Otto Emil, aus Wählitz.
17. Neubert, Gustav Adolf, aus Pleil.
18. Schramm, Hermann August, aus Döbeln.
19. Sebastian, Otto Oswald, aus Russdorf (abg.).
20. Theuerkorn, Alfred Otto, aus Leipzig.
21. Wappler, Georg Paul, aus Leipzig.
22. Zeidler, Karl Louis, aus Drebach.
23. Zeis, Martin Philipp, aus Niederfrohna.
24. Witschel, Gustav Adolf, aus Warnsdorf.
25. Meissner, Franz Ernst, aus Mittweida.
26. Benndorf, Friedrich William, aus Chemnitz.
27. Clauss, Albert Bruno, aus Chemnitz.
28. Dollfus, Heinrich Ernst, aus St. Aubin.
29. Ehret, Hermann, aus Reichenbach.
30. Hübner, Friedrich Adolf, aus Chemnitz.
31. Kaiser, Erdmann Egidius Hermann, aus Cöthen.
32. Kreher, Karl Rudolf Ludwig, aus Gablenz.
33. Lehmann, Friedrich Wilhelm, aus Böhrigen.
34. Ranjie, Friedrich Wilhelm, aus Chemnitz.
35. Ruppert, Friedrich Otto, aus Chemnitz.
36. von Tasch, Franz Karl Gustav, aus Glauchau (abgegangen).
37. Uhlich, Karl Wilhelm, aus Chemnitz.
38. Wunder, Oskar, aus Mutzschen.
39. Schindler, Georg Ludwig, aus Mollis.

Für einzelne Lehrfächer:

40. Webers, Karl Wilhelm Richard, aus Chemnitz.
41. Clauss, Ernst Emil Otto, aus Chemnitz (abg.).
42. Bartzsch, Karl Anton, aus Taura.

Classe III.

Für den vollen Classencursus:

1. Rudolph, August Ernst Otto, aus Annaberg.
2. Schmuck, Richard Edmund, aus Chemnitz (abg.).
3. Schreckenbach, Julius Eduard, aus Garnsdorf.
4. Bake, Karl Theodor, aus Sahlis.

5. von Beschwitz, Moritz Adolf, aus Gross-schweidnitz.
6. Bursian, Ernst Robert, aus Freiberg.
7. Falk, Paul Emil, aus Zwickau.
8. Fischer, Friedrich Adolf Otto, aus Borna (abg.).
9. Graf, Richard, aus Altenburg.
10. Grosser, Gustav Anton, aus Glauchau.
11. Härtwig, Heinrich Hermann, aus Schweikershain.
12. Haupt, Louis Wilhelm, aus Langhennersdorf.
13. Hochheim, Friedrich Wilhelm, aus Schaafstädt.
14. Jähne, Kurt Robert, aus Budissin.
15. Kämpfe, Emil Oswald, aus Erbisdorf.
16. Lange-Werner, Karl Hermann, aus Tannenberg.
17. Lehmann, Johannes Paul Gottfried, aus Neukirch.
18. Leitenberger, Oskar Karl Eduard, aus Niemes.
19. Martin, Erdmann Richard Julius, aus Thierbach.
20. Michael, Adolf Emil, aus Eilenburg.
21. Müller, Christian Ferdinand, aus Zschopau.
22. Müller, Friedrich Bruno, aus Zeitz.
23. Naumann, Julius Hermann, aus Neubraunshain (abgegangen).
24. Neubert, Otto, aus Chemnitz.
25. Oertel, Karl Gustav, aus Chemnitz.
26. Opitz, Karl Julius, aus Rochlitz.
27. Rewitzer, Karl Robert, aus Chemnitz.
28. Rink, Karl Albert, aus Lengenfeld.
29. Rosenkranz, Karl Friedrich, aus Chemnitz.
30. Ruder, August Eduard, aus Bockwa (abgegangen).
31. Schenkel, Friedrich Julius, aus Niedergräfenhain.
32. Schmidt, Gustav Adolf, aus Altenburg.
33. Seim, William August, aus Grüna.
34. Speck, Friedrich Oskar, aus Threna.
35. Tränkner, Theodor Heinrich, aus Grosspöhla.
36. Unger, Karl Friedrich Ernst, aus Streumen.
37. Wauer, Karl Gottlob, aus Bösenbrunn.
38. Zimmermann, Leberecht Hugo, aus Kaltofen.
39. Oeser, Friedrich Ernst, aus Haynichen.
40. Kloppenburg, Julius Sophus, aus Aarhuus (abg.).
41. Eckardt, Friedrich Emil, aus Chemnitz.
42. Hunger, Karl Friedrich, aus Chemnitz (abg.).
43. Krasting, Julius Adolf, aus Dresden.
44. Lange, Heinrich Bruno, aus Geringswalde (abg.).
45. Klien, Ewald Richard, aus Budissin.
46. Schultz, August Ferdinand Adelbert, aus Arnsdorf.
47. Terne, Heinrich Ernst Bruno, aus Chemnitz.
48. Mohr, Eduard, aus Königssee.
49. Hartmann, Ernst Paul, aus Thum.

Um Ostern 1859 traten ein:

50. Fritsche, Johannes Christoph, aus Dessau.
51. Fuhrmann, Ludwig Wilhelm, aus Borna.
52. Hofmann, August Victor, aus Auerbach.
53. Krutzsch, Hermann, aus Wünschendorf.
54. Paul, Ernst Friedrich, aus Morgenröthe.
55. Rhein, Gottfried Karl Melchior, aus Augsburg.
56. Rossmässler, Bernhard Adolf, aus Tharandt.
57. Schlegel, Johann August Wilhelm, aus Göllingen.
58. Storz, Ernst Richard, aus Grossenhain.
59. Tasche, Karl Gustav, aus Annaberg.
60. Witzschel, Julius Theodor, aus Chemnitz.

Im Laufe des Cursus traten ein:

61. Simon, Louis Alwin, aus Leipzig.
62. Schmidt, Friedrich Johannes Hermann, aus Zerbst.
63. Grengel, Hugo Moritz, aus Chemnitz.

Classe IV^a.

Für den vollen Classencursus:

1. Berger, Karl Emil, aus Oschatz.
2. Henny, Arthur, aus Lucka (benutzte zum Theil den Unterricht in Classe III).
3. Kissbert, Franz Urban, aus Chemnitz (abgeg.).
4. Straub, Oskar Hermann, aus Chemnitz (abgeg.).

Um Ostern 1859 traten ein:

5. Arndt, Richard Bernhard, aus Chemnitz.
6. Aurich, Heinrich Emil, aus Lichtenstein.
7. Bauer, Florian, aus Ehrenfriedersdorf.
8. Conrad, Eduard Alwin, aus Oschatz.
9. Ebersbach, Julius Theodor, aus Glauchau.
10. Freude, Alwin Oskar, aus Ebersbach.
11. Fricke, Karl Friedrich Otto, aus Leipzig.
12. Gölitzer, Alexander Adolf, aus Leipzig (abgeg.).
13. Grässer, Robert Ferdinand, aus Mosel.
14. Härtig, Johann Traugott, aus Tautenhain.
15. Heinzmann, Anton Oskar, aus Kleinwaltersdorf (abgegangen).
16. Hille, Julius Arthur, aus Borna (benutzte zum Theil den Unterricht in Classe III).
17. Höfler, Karl Robert, aus Chemnitz (benutzte zum Theil den Unterricht in Classe III).
18. Hoffmann, Christhold Selmar Ferdinand, aus Grosszschellbach.
19. Huth, Gottlieb Bruno, aus Kohren (benutzte zum Theil den Unterricht in Classe III).
20. Hunger, Friedrich Wilhelm, aus Chemnitz (benutzte zum Theil den Unterricht in Classe III).

21. Kabitzsch, Emil, aus Grosszschocher.
22. Kuhn, Hugo Bernhard, aus Glauchau.
23. List, Richard, aus Bockwa.
24. Mehnert, Ernst Louis, aus Oschatz.
25. Merkel, Walter Cecil, aus Zwenkau.
26. Mühlmann, Paul Otto, aus Thanhof.
27. Müller, Karl Wilhelm, aus Schmannewitz.
28. Reinhardt, Gustav Hermann, aus Frankenberg (benutzte zum Theil den Unterricht in Classe III).
29. Richter, August Friedrich, aus Thossfell.
30. Rosenplänter, Karl Georg, aus Riga.
31. Schmidt, Franz Edwin, aus Penig.
32. Schmidt, Maximilian, aus Bräunsdorf.
33. Schneider, Franz Richard, aus Zschopau (benutzte zum Theil den Unterricht in Classe III).
34. Seyffart, Arthur Johannes, aus Annaberg.
35. Seyffart, Paul Alexander, aus Annaberg.
36. Storz, Ernst Bruno, aus Grossenhain.
37. Thieme, Julius, aus Franken.
38. Uhlmann, Paul Reinhard, aus Waldenburg
39. Volkmann, Rudolf, aus Chemnitz.
40. Weichhold, Heinrich Ernst, aus Chemnitz (abg.).
41. von Wilucki, Otto Ernst Adolf, aus Mittelfrohna.
42. Würker, Karl Eduard, aus Bockwa.
43. Zimmermann, Edmund Richard, aus Freiberg.

Im Laufe des Cursus traten ein:

44. Lechla, Polycarpus Franz, aus Thum.
45. Schmidt, Eduard, aus Wien.

Für einzelne Lehrfächer:
Im Laufe des Cursus trat ein:

46. Brandt, Ernst Oskar, aus Chemnitz (abgegangen).

Classe IV^{b}.

Für den vollen Classencursus:
Um Ostern 1859 traten ein:

1. Bachmann, August Bruno, aus Lausigk.
2. Blume, Friedrich Maximilian, aus Lobstädt.
3. Büttner, Friedrich Paul, aus Zwickau.
4. Dietel, Gustav, aus Oberlungwitz.
5. Eisner, Friedrich Gustav, aus Regis (abgegangen).
6. Grahl, Louis Marcus, aus Ernstthal (gestorben).
7. Graul, Johann Karl Friedrich, aus Brandis.
8. Günther, Gustav Adolf, aus Glauchau.
9. Haubold, Heinrich Hermann, aus Kirchbach.
10. Helbig, Adolf Reinhold, aus Döbeln.
11. von Helbig, Johann Gotthelf, aus Freiberg.
12. Helling, Rudolf Traugott, aus Crimmitschau (abgegangen).
13. Hiehle, Gustav Emil, aus Oschatz.
14. Hinz, Johannes Christian, aus Leutmark.
15. Höckner, Ferdinand Johannes, aus Treben.
16. Huth, Woldemar, aus Remse.
17. Jahn, Ernst Hermann, aus Geithain.
18. Kühne, Heinrich Oswald, aus Weyda (abgegangen).
19. Kürzel, Arno Ferdinand, aus Crimmitschau.
20. Kunze, Bruno Richard, aus Geithain.
21. Meyer, Friedrich August, aus Werdau (abgeg.).
22. Meyer, Karl Alfred, aus Geithain.
23. Mühle, Friedrich Wilhelm, aus Sausedlitz.
24. Müller, Wilhelm Camillo, aus Zwickau (abgeg.).
25. Müller, Emil Oskar, aus Taura.
26. Neuhaus, Oskar Albaro, aus Chemnitz.
27. Recht, Robert Adolf, aus Rochlitz.
28. Späte, Hermann Louis Kurt, aus Ehrenhain.
29. Spahrkäs, Rudolf Arno, aus Altenburg (gestorben).
30. Thurm, Karl Eduard, aus Schönhain.
31. Tzschackert, Ernst Florian, aus Reitzenhain.
32. Vollbrechtshausen, Julius, aus Werdau (abg.).
33. Wagner, Richard Rudolf, aus Waldenburg.
34. Wappler, Oskar, aus Schwarzenberg.
35. Winkler, Emil Alfred, aus Rochlitz.
36. Schippan, Friedrich August, aus Penig.
37. Schäfer, Andreas Marcus, aus Chemnitz.

Im Laufe des Cursus traten ein:

38. Macht, Julius Feodor, aus Zeulenroda.
39. Hofmann, Robert Bernhard, aus Chemnitz.
40. Kreibich, Karl, aus Kamnitz.

Für einzelne Lehrfächer:
Im Laufe des Cursus traten ein:

41. Unger, Franz Gustav, aus Chemnitz.
42. Völkel, Ernst Adolf, aus Chemnitz.

Fabrikzeichenunterricht.

Classe I.

1. Nobst, Karl Hermann, aus Obersaida, Lithograph.
2. Richter, Julius, aus Altendorf, Formstecher.
3. Böttcher, Julius Reinhard, aus Mittelbach, Formstecher.
4. Scheffler, Friedrich Gustav, aus Chemnitz, Formstecher.
5. Haase, Friedrich Wilhelm, aus Chemnitz, Formstecher (abgegangen).
6. Beckert, Moritz Hermann, aus Chemnitz, Weber.
7. Burkhardt, Julius, aus Schönhaida, Formstecher (abgegangen).

8. Walther, Gustav Robert, aus Chemnitz, Formstecher.
9. Schützenmeister, Oswald Richard, aus Wiederau, Lithograph.
10. Uhlig, Wilhelm Emil, aus Chemnitz, Formstecher.
11. Kluge, Ernst Julius, aus Chemnitz, Formstecher.
12. Michaelis, Gustav Hermann, aus Chemnitz, Lithograph.
13. Frommhold, Karl Robert, aus Chemnitz, Musterzeichner (abgegangen).
14. Beckert, Julius Edmund, aus Chemnitz, Weber.
15. Strassburger, Friedrich Maximilian, aus Erdmannsdorf, Schlosser (abgegangen).
16. Gärtner, Gustav Hugo, aus Radeberg, Maschinenbauer (abgegangen).
17. Schmidt, Otto Hermann, aus Chemnitz, Maschinenbauer.
18. Kobes, Karl Ferdinand, aus Chemnitz, Weber.
19. Rosenkranz, Karl Friedrich Ernst, aus Chemnitz, Graveur.
20. Ebersbach, Karl August, aus Ernstthal, Musterzeichner.
21. Schüssler, Bernhard Oskar, aus Chemnitz, Musterzeichner.
22. } Zwei Hospitanten.
23. }

Um Ostern 1859 traten ein:

24. Schubert, Friedrich Adolf, aus Zöblitz, Schlosser (abgegangen).
25. Götze, Moritz Theodor, aus Chemnitz, Weber (abgegangen).

Im Laufe des Cursus traten ein:

26. Ein Hospitant (abgegangen).
27. Andritzky, Karl Gustav, aus Langenbielau, Kaufmann.

Classe II.

1. Bierbaum, Theodor August, aus Chemnitz, Formstecher.
2. Hertel, Julius Ernst, aus Chemnitz, Formstecher.
3. Weissbrodt, Julius Hermann, aus Chemnitz, Weber (abgegangen).
4. Morgenstern, Karl Franz, aus Altchemnitz, Formstecher.
5. Hoffmann, Hugo Karl, aus Chemnitz, Mechaniker.
6. Müller, Ernst Bruno, aus Zschopau, Lithograph.
7. Lüder, Karl Robert, aus Chemnitz, Lithograph.
8. Beckert, Julius Eduard, aus Chemnitz, Weber.
9. Stadelmeyer, Wilhelm Robert, aus Chemnitz, Weber (abgegangen).
10. Wohlleben, Moritz, aus Chemnitz, Tischler (abgegangen).
11. Krätzel, Friedrich Oskar, aus Chemnitz, Formstecher (abgegangen).

Um Ostern 1859 traten ein:

12. Hunger, August Oswald, aus Chemnitz, Tischler.
13. Riemann, Julius, aus Chemnitz, Weber.
14. Schönherr, Robert, aus Plauen, Mechaniker (abg.).
15. Steinert, Albert Julius, aus Chemnitz, Formstecher.
16. Katzsch, Hermann Robert, aus Chemnitz, Weber, (abgegangen).
17—21. Fünf Gewerbschüler.

Im Laufe des Cursus traten ein:

22. Heinsius, Karl Richard, aus Dresden, Maschinenbauer.
23. Glüsing, Georg Friedrich Nicolaus, aus Flensburg, Maschinenbauer.
24. Hartmann, Eduard Ludwig, aus Chemnitz, Weber.
25. Naumann, Karl August Richard, aus Chemnitz.
26. Wilson, Henry William, aus Burg, Musterzeichner.
27. 28. Zwei Gewerbschüler.

Baugewerkenschule.

Classe I.

1. Uhlmann, Adolf Gottlob, aus Oederan, Maurergeselle.
2. Maudrich, Johann Gottfried Richard, aus Döbeln, Maurergeselle.
3. Schkode, Emil Richard, aus Zwickau, Maurergeselle.
4. Viehweger, August Friedrich, aus Grünhain, Maurergeselle.
5. Beyer, Karl Heinrich, aus Naundorf, Zimmergeselle.
6. Fischer, Karl Ehregott, aus Saigerhütte Grünthal, Zimmergeselle.
7. Presske, Max Eduard, aus Dresden, Maurergeselle.
8. Richter, August Hermann, aus Chemnitz, Zimmergeselle.
9. Sänger, Georg Karl Wilhelm, aus Langenorla, Maurergeselle.

10. Beyer, Ernst Clemens, aus Borstendorf, Zimmerlehrling.
11. Winkler, Karl August, aus Griesbach, Maurergeselle.

Classe II.

1. Eckhardt, Michael, aus Schönbach, Zimmergeselle.
2. Beck, Johann August, aus Chemnitz, Zimmerlehrling.
3. Gerber, Gustav Adolf, aus Wiesenburg, Maurergeselle.
4. Heber, Friedrich Paul, aus Crostau, Maurerlehrling.
5. Heinitz, Karl Franz, aus Zschopau, Zimmergeselle.
6. Herold, Ferdinand Albert, aus Zwickau, Maurergeselle.
7. Hofmann, Florenz Richard, aus Thum, Zimmerlehrling.
8. Junghanns, Christian Gotthilf, aus Pfannenstiel, Zimmergeselle.
9. Kupfer, Johann Emil, aus Lichtenstein, Zimmergeselle.
10. Lehmann, Johann Friedrich, aus Unterschwöditz, Maurergeselle.
11. Müller, Wilhelm August, aus Sandersleben, Maurergeselle.
12. Sändig, Karl August, aus Schneeberg, Zimmergeselle.
13. Uhlmann, Karl Eduard Gustav, aus Chemnitz, Maurerlehrling (abgegangen).
14. Wolf, Karl Oskar, aus Oberwiesa, Steinmetzlehrling.

Classe III.

1. Emke, Johann Friedrich, aus Burkersdorf, Maurergeselle (abgegangen).
2. Gehre, Karl Friedrich, aus Zscheiden, Maurerlehrling.
3. Heinsius, August Julius, aus Waldenburg, Maurerlehrling.
4. Jäger, Franz Vincenz, aus Chemnitz, Zimmerlehrling.
5. Kaufmann, Clemens Valerian, aus Rittersgrün, Maurerlehrling.
6. Otto, Karl August, aus Zwickau, Maurergeselle.
7. Queck, Karl Louis, aus Bockwa, Maurerlehrling.
8. Reichelt, August Hermann, aus Hilbersdorf, Steinmetzlehrling (abgegangen).

Um Michaelis 1859 traten ein:

9. Baumann, Wilhelm Robert, aus Chemnitz, Zimmerlehrling.
10. Beyer, Anton Leonhard, aus Jöhstadt, Maurergeselle (abgegangen).
11. Böttger, Friedrich Robert, aus Frankenberg, Zimmergeselle.
12. Bohne, Karl August, aus Gera, Zimmergeselle.
13. Dietrich, Gustav Adolf, aus Chemnitz, Zimmerlehrling.
14. Franke, Karl Alwin, aus Geithain, Zimmerlehrling.
15. Georgi, Johann Christoph Friedrich, aus Aue, Zimmerlehrling.
16. Gerber, Ernst Richard, aus Wiesenburg, Zimmerlehrling.
17. Hauschild, Alfred Moritz, aus Hohenfichte, Maurerlehrling.
18. Hofmann, Friedrich Adolf, aus Wiesenburg, Maurerlehrling.
19. Hübschmann, Karl August, aus Waschleithen, Zimmergeselle (abgegangen).
20. Lippold, Alwin Hermann, aus Ronneburg, Zimmergeselle.
21. Mehner, Karl Louis, aus Burkhardtsdorf, Maurerlehrling.
22. Schneider, Gottwerth, aus Podebuls, Zimmergeselle.
23. Schober, Ernst Julius, aus Starbach, Maurergeselle.
24. Schöning, Johann Alexis Ernst, aus Lübeck, Zimmergeselle.
25. Seidel, Karl Hermann, aus Zwickau, Zimmerlehrling.
26. Teichmann, Ernst Moritz, aus Zettlitz, Zimmerlehrling.
27. Thiele, Karl August, aus Gablenz, Zimmergeselle.
28. Viehweger, Karl Ferdinand, aus Grünhain, Zimmergeselle.
29. Wolf, Franz Hermann, aus Jüdinhain, Maurerlehrling.
30. Wolfrum, Otto Friedrich, aus Chemnitz, Zimmerlehrling.
31. Wüstner, Ehregott Fürchtegott, aus Niederlangenau, Zimmerlehrling.

Mechanische Baugewerken- und Werkmeisterschule.

Classe I und II.

Die nachstehend aufgeführten Schüler bildeten im Sommerhalbjahr die zweite, im Winterhalbjahr die erste Classe, mit Ausnahme eines der abgegangenen Schüler, welcher nur an dem Unterricht der zweiten Classe Theil nahm. Die zweite Classe zählte daher 15, die erste Classe 14 Schüler.

1. Barth, Karl August, aus Marbach, Maschinenbaulehrling.
2. Brühl, Johannes Heinrich Theophil, aus Frauendorf, Maschinenbaugehülfe.
3. Dienst, August Hermann, aus Belgern, Schlossergeselle.
4. Hentschel, Otto Reinhold, aus Grimma, Maschinenbaugehülfe.
5. Hillig, Otto Moritz, aus Gersdorf, Maschinenbaugehülfe.
6. Lange, Johann Friedrich Julius, aus Altenburg, Maschinenbaugehülfe.
7. Rechenberg, Karl Johannes, aus Leisnig, Schlossergeselle.
8. Schröder, Bruno Otto, aus Chemnitz, Schlossergeselle.
9. Winkler, Gustav, aus Jungholz, Maschinenbaulehrling.
10. Gröbe, Christian Karl Adolf, aus Lauchhammer, Maschinenbaugehülfe.
11. Reuthe, Friedrich Karl Hermann, aus Hettstedt, Maschinenbaugehülfe.
12. Vieweg, Karl Oswald, aus Schwarzenberg, Zimmergeselle (im Januar 1860 abgegangen).

Um Ostern 1859 traten ein:

13. Eckhardt, Michael, aus Schönbach, Zimmergeselle (um Michaelis 1859 abgegangen).
14. Mengelsôn, Karl Ferdinand, aus Riga, Zeugschmiedlehrling.
15. Lindstedt, Gottlieb Leopold Karl, aus Birkenfeld, Schlossergeselle.

Classe III.

Um Michaelis 1859 traten ein:

1. Bräuer, Ernst Moritz Bruno, aus Werdau, Maschinenbaugehülfe.
2. Buschendorf, Paul Friedrich, aus Roben, Schlossergeselle.
3. Gärtner, Gustav Hugo, aus Radeberg, Maschinenbaulehrling.
4. Geyer, Hugo Richard, aus Treben, Mechanikergehülfe.
5. Hunger, Karl Oskar, aus Aue, Schlossergeselle (abgegangen).
6. Kober, Franz Aemilius, aus Zeitz, Schlossergeselle.
7. Koehler, Valerius Wiegand, aus Schelditz, Mühlenbaugehülfe.
8. Leinert, Johann Karl, aus Grimma, Maschinenbaugehülfe.
9. Meyer, Friedrich August, aus Werdau, Maschinenbaulehrling.
10. Müller, William Alexander, aus Gahlenz, Krempelmeister (abgegangen).
11. Neuberg, Karl Wilhelm, aus Grimma, Kupferschmiedgeselle (abgegangen).
12. Pfander, Karl August, aus Esslingen, Schlossergeselle.
13. Richter, Friedrich Hermann, aus Dresden, Schlossergeselle (abgegangen).
14. Rudolph, Julius Oskar, aus Zeulenroda, Müllergeselle.
15. Schramm, Adolf Theodor, aus Zittau, Schlossergeselle.
16. Sonntag, Otto Hermann, aus Lonzig, Maschinenbaugehülfe.
17. Straub, Oskar Hermann, aus Chemnitz, Maschinenbaulehrling.
18. Thurm, Friedrich Leopold, aus Alsdorf, Maschinenbaugehülfe.
19. Voigt, Eduard Moritz, aus Werdau, Maschinenbaulehrling.
20. Vollbrechtshausen, Julius, aus Werdau, Maschinenbaulehrling.
21. Wiedmann, Alwin Leopold, aus Geyer, Schlossergeselle.

Ordnung der Prüfung in der Baugewerkenschule und der mechanischen Baugewerken- und Werkmeisterschule.

Donnerstag den 29. März 1860.

Vormittags 8—12 Uhr.

Classe III. der Baugewerkenschule. } Physik. Kohl.
Classe III. der mechan. Baugewerken- und Werkmeisterschule. } Physik. Kohl.
Classe III. der Baugewerkenschule. } Mathematik. Dr. Fiedler
Classe III. der mechan. Baugewerken- und Werkmeisterschule. } Mathematik. Dr. Fiedler
Classe III. der Baugewerkenschule. Allgemeine Baukunde. Gottschaldt.
Classe I. der mechan. Baugewerken- und Werkmeisterschule. Mechanik und Maschinenlehre. Kankelwitz

Nachmittags 2—4½ Uhr.

Classe I. und **II.** der Baugewerkenschule. Mechanik. Kohl.
Classe I. und **II.** der Baugewerkenschule. Bauwissenschaft. Friedrich.
Austheilen der Censuren und Auszeichnungen.

Ordnung der Prüfung in der Gewerbschule.

Freitag den 30. März 1860.

Vormittags 8—12 Uhr.

Classe IVᵃ. und **IVᵇ.** Mathematik. Oberreit.
Physik. Kluge.
Naturgeschichte. Kluge.
Classe I. und **II.** Französische Sprache. Vodoz.

Nachmittags 2—5 Uhr.

Classe III. Physik. Prof. Ludwig.
Mathematik. Prof. Ludwig.
Allgemeine Chemie. Prof. Schnedermann.
Deutsche Sprache. Lamprecht.

Sonnabend den 31. März 1860.

Vormittags 8—12 Uhr.

Classe Iᵃ. und **Iᵇ.** Englische Sprache. White.
Classe II. Aa. Mathematik. Prof. Ludwig.
Classe II. A. Mechanik. Dr. Zetzsche.
Classe I. und **II.** Deutsche Sprache. Lamprecht.
Classe II. Ab, B, C. Technische Chemie. Prof. Schnedermann.

Nachmittags 2—5 Uhr.

Classe I. Maschinenlehre. Prof. Böttcher.
Classe II. C. und **III. C.** Landwirthschaft. Prof. Stöckhardt.
Austheilen der Censuren und Auszeichnungen.

Zu diesen Prüfungen, wie zur Besichtigung der gleichzeitig ausgestellten Arbeiten der Schüler, ladet die Gönner und Freunde der gewerblichen Bildungsanstalten ergebenst ein

Prof. Dr. **Schnedermann,**
Director.

Datum der Entleihung bitte hier einstempeln!

06. Okt. 1998		

III/9/280 JG 162/6/85