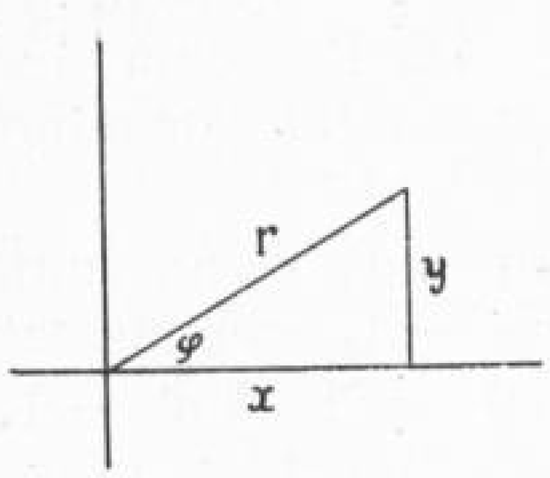
studiert. Schon die vier Grundrechnungsarten geben zu solchen Betrachtungen Anlafs, wenn man $y = x \pm a$, $y = ax$, $y = \frac{a}{x}$ schreibt, unter a eine feste, unter x eine beliebig veränderliche Zahl versteht und y als Funktion von x auffafst; setzt man $y = x^z$, so erhält man mehrere Möglichkeiten, indem man irgend einer der drei Zahlen einen festen Wert beilegt, eine zweite als beliebig veränderlich und die dritte als die abhängige Veränderliche, als die Funktion betrachtet. Zu gröfserer Klarheit kommen diese Begriffe aber erst, wenn eine graphische Darstellung die funktionale Abhängigkeit einer reellen Zahl von einer beliebig veränderlichen andern reellen Zahl veranschaulicht. Fast ausschliefslich werden dazu zwei Methoden benutzt. Die eine ist die von Descartes angegebene Methode rechtwinkliger Koordinaten, bei der z. B. das gerade Verhältnis $y = ax$ eine durch den Koordinatenursprung gehende Gerade, das umgekehrte Verhältnis $y = \frac{a}{x}$ eine gleichseitige Hyperbel als „Diagramm" ergibt. Die andre ist die Methode der Polarkoordinaten, die weiter unten besprochen werden soll. Eine wesentliche Erweiterung mufste diese Darstellung nach Einführung der komplexen Zahlen erfahren. Eine beliebig veränderliche Gröfse $z = x + iy$ erfordert ja zu ihrer Darstellung schon die ganze Ebene; ebenso ist für die abhängige Gröfse $Z = X + iY$ eine ganze Ebene nötig, es schwindet also zunächst die einfache Darstellung der funktionalen Abhängigkeit durch die Punkte einer Kurve. Jedem Punkte, jeder Linie, jedem Bereiche der z-Ebene entspricht dann ein Punkt, eine Linie, ein Bereich der Z-Ebene und umgekehrt — wobei allerdings die bei vielen Funktionen auftretende Mehrdeutigkeit nicht aufser Acht gelassen werden darf. Zur bequemeren Veranschaulichung führen wir nun Polarkoordinaten ein. Dazu müssen wir die ursprünglich zum Zwecke der Dreiecksberechnung erfundenen Winkelfunktionen sin, cos, tan, cot heranziehen. Ihre Untersuchung zeigt zunächst, dafs sie periodische Funktionen sind, was bei ihrer graphischen Darstellung besonders anschaulich wird. Aus der beistehenden Figur ist unmittelbar ersichtlich, dafs

Fig. 1.



$$x = r \cos \varphi \qquad r = +\sqrt{x^2 + y^2} \qquad z = x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$
$$y = r \sin \varphi \qquad \tan \varphi = y : x$$

ist. Soll nun die Funktion $z^2 = Z$ oder $z = \sqrt{Z}$ untersucht werden und setzt man $Z = X + iY = R(\cos \Phi + i \sin \Phi)$, so ergeben sich aus der leicht zu berechnenden Formel $z^2 = r^2(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)$ die Beziehungen $R = r^2$ und $\Phi = 2\varphi$. Erteilt man r einen festen Wert und läfst φ von 0 bis π ($=$ arc 180^0) zunehmen, so hat auch $R = r^2$ einen festen Wert und Φ durchläuft die Werte von 0 bis 2π. Während also der Punkt z einen Halbkreis um den Nullpunkt vom Punkte $+r$ der x-Achse über den Punkt $+ri$ der y-Achse bis zum Punkte $-r$ durchläuft, beschreibt der Punkt Z in seiner Ebene einen vollen Kreis mit Radius $R = r^2$ um den Nullpunkt. Er durchläuft diesen ein zweites Mal, wenn z den andern Halbkreis von $\varphi = \pi$ bis $\varphi = 2\pi$ durchmifst. Da nun r jeden beliebigen positiven reellen Wert annehmen kann, so erkennt man: jedem Punkte der Z-Ebene entspricht nicht ein Punkt der z-Ebene,