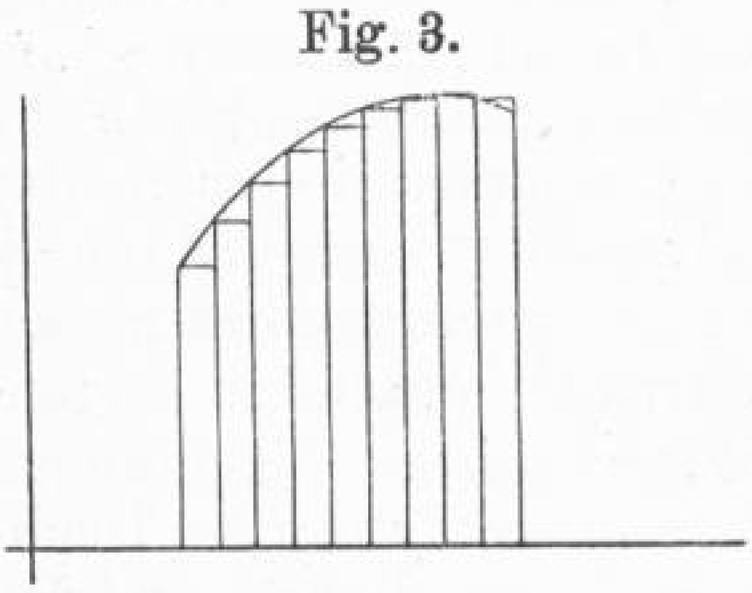
mit der x-Achse bildet. Aus demselben Grunde erkennt man, daſs für den Winkel $\vartheta = 90^0 - \tau$, den die Kurventangente mit der y-Achse einschlieſst, tan ϑ der Grenzwert der Abszissendifferenz dividiert durch die Ordinatendifferenz ist, daſs also dieser zweite Grenzwert das Reziprokum des ersten ist. Diese Grenzwerte nennt man Differentialquotienten und man versteht, daſs die Konstruktion der Tangente in einem beliebigen Kurvenpunkte völlig bestimmt ist, wenn man den einen jener beiden Differentialquotienten berechnen kann. Von hier aus hat die durch Leibniz begründete Differentialrechnung ihren Ausgang genommen.

Bei der Inhaltsbestimmung des Kreises (und ebenso bei der Berechnung des Kreisumfanges) gelingt die Lösung nur dadurch, daſs man eine Summe von unendlich vielen, unendlich kleinen Gröſsen herstellt. Zur praktischen Berechnung geht man ja von irgend einer regelmäſsigen Teilung des Kreises aus und verdoppelt die Anzahl der Teile so oft, bis die gewünschte Annäherung erreicht ist, theoretisch aber muſs man sich diesen Prozeſs unendlich weit fortgesetzt denken. Solche Summen von unendlich vielen, unendlich kleinen Gröſsen nennt man Integrale, und die Art ihrer Einführung bei einer beliebigen Kurve $y = f(x)$ erkennt man am besten aus der beistehenden Figur. Die grundlegende Aufgabe ist, die Fläche zu berechnen, die von einem Kurvenbogen, den Grenzordinaten und der x-Achse umschlossen wird. Das betreffende Stück der x-Achse teilt man in n gleiche Teile und summiert die zugehörigen Rechtecke. Je gröſser man n werden läſst, desto näher kommt man an die gesuchte Fläche und für unendlich groſses n erhält man diese selbst.

Fig. 3.



So wie sich nun an die Planimetrie die analytische, oben charakterisierte Geometrie der Ebene anschlieſst, so erhält die Stereometrie ihre Weiterführung in der analytischen Geometrie des Raumes. Die Lage eines Raumpunktes kann ja durch seine Abstände von drei zu einander senkrechten Ebenen festgelegt werden. Den Gebilden im Raume entsprechen dann Gleichungen zwischen drei veränderlichen Gröſsen und umgekehrt kann man solche Gleichungen durch Raumfiguren anschaulich deuten. Den geometrischen Konstruktionen und Beziehungen im Raume entsprechen dann gewisse Rechenoperationen und Gleichungen und umgekehrt. Die Differentialrechnung bestimmt bei Raumkurven und Flächen Tangentialebenen, Normalen usw., die Integralrechnung Kurvenlängen, Oberflächen, Rauminhalte. Auch hierfür finden wir in der Elementarmathematik Ansätze bei der Berechnung der Oberflächen von Zylinder, Kegel und Kugel, bei der Inhaltsbestimmung nach dem Cavalierischen Satze, bei den Guldinschen Regeln.

Um nun Raumgebilde anschaulich zu machen, kann man sie entweder in wahrer Gröſse nachbilden, Modelle von ihnen herstellen, man kann zweitens von ihnen nach gewissen, genau bestimmten Regeln Reliefs anfertigen oder man kann das dreidimensionale Gebilde durch Projektion in einer Ebene darstellen. Diese letztere Methode, Raumgebilde in der Ebene durch Zeichnung anschaulich zu machen, hat zu einer sehr weitausgedehnten Disziplin geführt, zur darstellenden Geometrie, die ja auch im Schulunterrichte seit langem Fuſs gefaſst hat. So wie in der darstellenden Geometrie auf zeichnerischem Wege, meist ohne Rechnung,