Geh. Hofrat Prof. Dr. Ph. Weinmeister spricht über die Ableitung der Formel für den Mantel des schief abgeschnittenen Umdrehungskegels.

Projiziert man die in der Grundfläche des Kegels entstehende Schnittellipse mit den Achsen $2a$ und $2b$ auf eine durch die Spitze O gehende Ebene, die zur Achse des Umdrehungskegels senkrecht steht, so entsteht in dieser eine Ellipse mit den Achsen $2a'$ und $2b$, deren Fläche sich darstellen läfst als Projektion des Kegelmantels M in ihre Ebene, also ist

(1) $$M = \frac{\pi a' b}{\sin \psi} = \pi a b \frac{\sin \alpha}{\sin \psi},$$

wenn 2ψ der Öffnungswinkel des Umdrehungskegels und α der Winkel ist, den die Umdrehungsachse mit der Grundfläche bildet. Derjenige Achsenschnitt OAB des Kegels, welcher senkrecht zur Grundfläche steht, ist ein Dreieck, dessen eine Seite $AB = 2a$ ist, während die beiden anderen Seiten mit l_1 und l_2, d. i. die längste und die kürzeste Mantellinie des Kegels, bezeichnet werden sollen. Die Seite $2a$ dieses Dreiecks zerfällt durch die Kegelachse OO' in die beiden Abschnitte $AO' = i_1$ und $O'B = i_2$. Da aber

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \psi} = \frac{l_1}{i_1} = \frac{l_2}{i_2} = \sqrt{\frac{l_1 l_2}{i_1 i_2}} \text{ und } a = \frac{i_1 + i_2}{2},$$

so hat man

$$M = \frac{\pi b}{2}(i_1 + i_2)\sqrt{\frac{l_1 l_2}{i_1 i_2}} = \frac{\pi b}{2}\left(\sqrt{\frac{i_1}{i_2}} + \sqrt{\frac{i_2}{i_1}}\right)\sqrt{l_1 l_2}.$$

Weil ferner

$$\sqrt{\frac{i_1}{i_2}} = \sqrt{\frac{l_1}{l_2}} \text{ und } \sqrt{\frac{i_2}{i_1}} = \sqrt{\frac{l_2}{l_1}}$$

ist, so wird

(2) $$M = \pi \frac{l_1 + l_2}{2} b.$$

Denkt man sich nun, um b auszudrücken, in den Kegel eine Kugel eingeschrieben, so wird diese die Grundfläche in einem Brennpunkte F der Ellipse berühren. Der Achsenschnitt des Kegels schneidet die Kugel in dem dem Dreieck OAB eingeschriebenen Kreise, der insbesondere AB in F berührt. Nun ist einerseits, weil ψ der halbe Winkel des Dreiecks OAB in O ist, nach einer bekannten Formel der Trigonometrie

$$\sin \psi = \sqrt{\frac{AF \cdot BF}{l_1 l_2}},$$

andererseits, weil F Brennpunkt der Ellipse mit den Halbachsen a, b ist,

$$AF \cdot FB = b^2,$$

mithin

(3) $$b = \sqrt{l_1 l_2} \sin \psi.$$

Also wird

(4) $$M = \pi \frac{l_1 + l_2}{2} \sqrt{l_1 l_2} \sin \psi.$$

Setzt man im speziellen Falle $l_1 = l_2 = l$

und

$$l \sin \psi = r,$$

so ergibt sich die bekannte Formel für den Mantel des geraden Kreiskegels

(5) $$M = \pi l r.$$

Der Vortragende bemerkt zum Schlusse, dafs aus Gleichung (4) die Formel für die Oberfläche des Hufes hergeleitet werden kann.

Zweite Sitzung am 15. April 1909. Vorsitzender: Prof. Dr. A. Witting. — Anwesend 16 Mitglieder und Gäste.

Prof. Dr. F. Müller nimmt das Wort zur Gedächtnisrede an Hermann Grafsmann. (Vergl. Abhandlung IV.)