In seiner Abhandlung „Über die Fläche vom kleinsten Inhalt bei gegebener Begrenzung" hat Riemann die Aufgabe behandelt, ein Minimalflächenstück analytisch zu bestimmen, dessen Begrenzung aus drei einander kreuzenden geraden Linien besteht, und stellt für den Fall, daſs die Geraden den Koordinatenaxen parallel laufen, die fertigen Ausdrücke für die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes der Fläche auf.

Der Vortragende teilt mit, daſs er für den erwähnten speziellen Fall die Aufgabe mit einfachen Hilfsmitteln gelöst hat, und daſs er die verschiedenartigen Gestalten, welche die durch die Formeln dargestellten Minimalflächenstücke dadurch annehmen können, daſs sowohl die Abstände zwischen den begrenzenden Geraden als auch die Vorzeichen dieser Abstände variiert werden, einem genauen Studium unterworfen hat, und zeigt durch eine gröſsere Anzahl von Modellen, welcher Reichtum von Gestalten hierbei auftritt.

Zu einer vollständigen Übersicht aller in Betracht zu ziehenden Fälle gelangt Vortragender durch die Bemerkung, daſs die Ausdrücke für die kürzesten Abstände A, B und C zwischen den begrenzenden Geraden in die Form eines Produktes von zwei Faktoren ersten Grades dreier von einander unabhängiger Parameter p, q, r gesetzt werden können.

$$A = \pi[4p^2 - (p+q+r)^2] = \pi(3p+q+r)(p-q-r),$$

oder $A = A_2 \,.\, A_1$ und analog damit

$$B = B_2 \,.\, B_1, \;\; C = C_2 \,.\, C_1.$$

Betrachtet man also die Parameter als die homogenen Koordinaten eines Punktes in einer Ebene (p, q, r), so wird durch die sechs Geraden $A_1 = 0$, $A_2 = 0$ usw. die ganze Ebene derart in 16 Gebiete eingeteilt, daſs innerhalb jedes einzelnen derselben die Vorzeichen der Abstände bei festgestellter Verknüpfung der Enden der drei begrenzenden Geraden durch die ins Unendliche verlaufenden Sektoren des Flächenstückes sich nicht ändern, während beim Überschreiten einer Trennungslinie zweier benachbarter Gebiete einer der Abstände sein Vorzeichen wechselt.

Für jedes einzelne dieser Gebiete, sowie für die Trennungslinien und die Eckpunkte derselben wird die Gestalt der entsprechenden Flächen durch Modelle zur Anschauung gebracht.

Wird einer der Abstände dadurch gleich Null, daſs der Punkt (p, q, r) sich einer der Geraden A_1, B_1 oder C_1 nähert, so nähert sich der betreffende, sich ins Unendliche erstreckende Sektor einem ebenen Flächenstücke von der Gestalt der Fläche einer Viertelebene, welches sich schlieſslich von dem Minimalflächenstücke trennt, während dagegen eine Annäherung des Punktes (p, q, r) an eine der Geraden A_2, B_2 oder C_2 damit gleichbedeutend ist, daſs das Minimalflächenstück sich selbst zu durchschneiden anfängt. Betrachtet man z. B. das Gebiet in Form eines Fünfeckes, welches von Strecken der Geraden $C_1\,A_1\,B_2\,A_2\,B_1$ begrenzt wird, so entsprechen den drei Ecken $B_1\,A_2$, $B_2\,A_2$ und $B_2\,A_1$ drei verschiedene Minimalflächenstücke mit derselben Begrenzung, gebildet von drei Geraden, von welchen zwei von der dritten geschnitten werden. Durch dieselbe Begrenzung geht noch ein viertes Minimalflächenstück, die gewöhnliche Schraubenfläche und auſserdem eine Minimalfläche, welche eine sogenannte Doppelfläche ist. Von sämtlichen fünf Flächenstücken werden Modelle vorgezeigt.

Der Vortragende geht hiernach über zur Beantwortung der Frage, ob unter Beibehaltung der Verknüpfung der ins Unendliche reichenden Enden der begrenzenden Geraden ein Minimalflächenstück eindeutig bestimmt ist, wenn die Verhältnisse der Abstände $A : B : C = a : b : c$ gegeben sind.

Da die Ausdrücke für die Abstände Funktionen zweiten Grades der Parameter p, q, r sind, so bezeichnet $A : B = a : b$ die Gleichung eines durch die vier Schnittpunkte der Geraden A_1, A_2, B_1, B_2 gehenden Kegelschnittes, welcher, wenn die Abstände A und B dasselbe Vorzeichen haben, eine Hyperbel, im entgegengesetzten Falle eine Ellipse ist. Eine analoge Bedeutung haben die Gleichungen $B : C = b : c$ und $A : C = a : c$. Die drei Kegelschnitte haben vier Schnittpunkte mit einander gemein. Die Beantwortung der aufgestellten Frage ist somit zurückgeführt auf die Entscheidung, ob ein oder mehrere dieser Schnittpunkte in dasselbe Gebiet, oder auch in verschiedene Gebiete mit derselben Zeichenkombination der Abstände fallen können. Es zeigt sich nun, daſs nur für die Zeichenkombination $(- - -)$ das Minimalflächenstück durch die Abstände eindeutig bestimmt ist, während für die übrigen Zeichenkombinationen einem gegebenen Wertverhältnisse der Abstände ein, zwei oder drei verschiedene Minimalflächenstücke entsprechen können. Von solchen von einander verschiedenen Flächen, die durch dieselbe Begrenzung hindurchgehen können, werden Modelle vorgelegt.

Auf den betrachteten Minimalflächenstücken kann im Innern ein singulärer Punkt von der Beschaffenheit, daſs durch denselben drei Asymptotenlinien hindurchgehen, auftreten; oder auch hat die Fläche zwei entweder auf derselben oder auf zwei verschiedenen der begrenzenden Geraden gelegene sogenannte Rückkehrpunkte der Normale. Die