$$\frac{1}{k} r = \frac{a M + c L - R}{a},$$

$$\frac{1}{k} p = N, \quad \frac{1}{k} q = \frac{c L - R}{a}, \quad \frac{1}{k} s = L.$$

8. Gleitet der Scheitel P eines beständigen Winkels α entlang einer zirkularen rationalen Kurve 3. Ordnung, während ein Schenkel den Doppelpunkt O enthält, so werden die anderen Schenkel von den dem Winkel α zugehörigen Gleitlinien in Punktreihen geschnitten, die zu dem Büschel der Strahlen OP projektiv sind.

Man kann nun ganz allgemein nach den Geraden fragen, die die bezeichneten Geraden in Punkten schneiden, die den OP projektiv entsprechen. Setzt man die Kurvengleichung in der Form voraus

$$y(x^2 + y^2) - d x^2 + M x y + N y^2 = 0,$$

so enthält die Kurve für jedes λ den Punkt

$$y = \lambda x, \quad x = \frac{d - M\lambda - N\lambda^2}{\lambda(1 + \lambda^2)}.$$

Die Gerade PQ hat die Gleichung

$$\mathfrak{y} - \lambda x = \frac{\lambda + \tan\alpha}{1 - \lambda \tan\alpha}(\mathfrak{x} - x)$$

oder

$$\mathfrak{y}(1 - \lambda \tan\alpha) + (1 + \lambda^2)\tan\alpha \cdot x - (\lambda + \tan\alpha)\mathfrak{x} = 0.$$

Ersetzt man hierin den obigen Wert für x, so folgt

$$\lambda(1 - \lambda \tan\alpha)\mathfrak{y} + (d - M\lambda - N\lambda^2)\tan\alpha - (\lambda^2 + \lambda \tan\alpha)\mathfrak{x} = 0,$$

oder, nach λ geordnet,

$$(\mathfrak{y}\tan\alpha + N\tan\alpha + \mathfrak{x})\lambda^2 + (M\tan\alpha - \mathfrak{y} + \mathfrak{x}\tan\alpha)\lambda - d\tan\alpha = 0.$$

Soll hierdurch eine projektive Beziehung ausgedrückt werden, so muſs diese quadratische Funktion von λ in zwei rationale lineare Faktoren zerfallen, deren einer $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ nicht enthält, und weggelassen werden kann. Im einfachsten Falle ist dies der Faktor $\lambda + \tan\alpha$, er teilt die quadratische Form unter der Bedingung

$$(1 + \tan^2\alpha)\mathfrak{y} + N\tan^2\alpha - M\tan\alpha - d = 0;$$

die projektive Beziehung folgt aus

$$\lambda(\mathfrak{y}\tan\alpha + N\tan\alpha + \mathfrak{x}) - d = 0.$$

Nimmt man dagegen allgemeiner $\lambda + u$ als abzuscheidenden Faktor, so ergibt sich als Bedingung für die Teilbarkeit eine lineare Gleichung, die neben $\mathfrak{y}$ auch $\mathfrak{x}$ enthält. Man erkennt hieraus, daſs für jedes α und jedes u eine bestimmte Gerade vorhanden ist, auf die die C_3 durch die angegebene Konstruktion in einer projektiven Reihe abgebildet wird.

9. Schneidet man eine rationale zirkulare C_3 durch eine Strahleninvolution, deren Träger der Doppelpunkt O ist, und zieht durch jeden Punkt P der Kurve eine Gerade PQ, die mit OP den beständigen Winkel α bildet, so schneiden sich je zwei Gerade PQ und $P'Q'$, deren zugehörige Doppelpunktstrahlen OP und OP' ein Paar der Involution bilden, in Punkten einer bestimmten Geraden.