Es dürfte nicht ohne Interesse sein, festzustellen, ob die Kugeloberflächen die einzigen Flächen sind, welche diese Eigenschaft besitzen. Zu diesem Zweck fragen wir:

Wie mufs eine krumme Fläche beschaffen sein, wenn die Schar ihrer ∞^2 Lichtgrenzkurven identisch sein soll mit der Schar ihrer ∞^2 geodätischen Linien?*)

Bei Beantwortung dieser Frage können wir von vornherein die abwickelbaren Flächen ausscheiden, denn man überzeugt sich leicht, dafs auf einer abwickelbaren Fläche zwar jede Lichtgrenzkurve eine geodätische Linie ist (nämlich eine Gerade oder ein System von mehreren Geraden), aber nicht jede geodätische Linie eine Lichtgrenzkurve werden kann; denn die geodätischen Linien einer abwickelbaren Fläche sind im allgemeinen krumme Linien, und die längs einer krummen Linie um die Fläche beschriebene Developpable ist identisch mit der Fläche selbst.

Infolge des Ausscheidens der abwickelbaren Flächen kann die gestellte Frage folgendermafsen analytisch eingekleidet werden:

Wie mufs die Funktion $f(x, y)$ beschaffen sein, wenn die Gleichung

$$z = f(x, y)$$

eine nicht abwickelbare Fläche darstellen soll, auf welcher die Lichtgrenzkurven identisch sind mit den geodätischen Linien?

Es entsteht also das Problem, eine unbekannte Funktion zweier Variabeln zu ermitteln, welche gewisse Bedingungen zu erfüllen hat. Im folgenden wird sich herausstellen, dafs die verlangte Funktion einem System von vier partiellen Differentialgleichungen III. Ordnung Genüge zu leisten hat, welches sich aber reduzieren läfst auf ein System von zwei partiellen Differentialgleichungen II. Ordnung; ersteres System ist beschränkt integrabel, letzteres ist unbeschränkt integrabel. Daher gibt es schliefslich ∞^4 gemeinsame Lösungen aller dieser Differentialgleichungen und mithin auch ∞^4 Flächen von der gewünschten Beschaffenheit; wir werden sehen, dafs dies genau die ∞^4 Kugeloberflächen des Raumes sind.

1.

Um das Problem in Angriff nehmen zu können, denken wir uns die gewünschte Fläche auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem (x, y, z) bezogen und durch eine Gleichung von der Form

$$z = f(x, y) \tag{1}$$

dargestellt; geben sodann für diese Fläche einerseits die Differentialgleichung ihrer ∞^2 Lichtgrenzkurven, andererseits die Differentialgleichung ihrer ∞^2 geodätischen Linien an — in beiden Fällen handelt es sich um gewöhnliche Differentialgleichungen II. Ordnung zwischen den zwei Veränderlichen x und y; und stellen schliefslich die Bedingungen dafür auf, dafs diese beiden Differentialgleichungen miteinander identisch werden sollen. Es werden sich vier Bedingungsgleichungen ergeben, welche die partiellen Ableitungen der Funktion $f(x, y)$ — bis zur III. Ordnung einschliefslich — enthalten, welche also ein System von vier partiellen Differentialgleichungen III. Ordnung mit der unbekannten Funktion $f(x, y)$ bilden.

---

*) Die sphärischen Bilder der geodätischen Linien einer solchen Fläche sind offenbar identisch mit den geodätischen Linien der Bildkugel.