$$(9)\qquad \beta = \frac{1+3p^2}{p^2 q}\cdot s^2, \quad \gamma = \frac{1+3q^2}{p q^2}\cdot s^2,$$

also zwei partielle Differentialgleichungen III. Ordnung. Nun hat jede Lösung des Systems (7) offenbar auch den beiden Gleichungen (9) Genüge zu leisten; mithin auch noch der wegen $\frac{\partial \gamma}{\partial x} = \frac{\partial \beta}{\partial y}$ aus diesen beiden Gleichungen folgenden Relation

$$U\left(\frac{1+3q^2}{p q^2}\, s^2\right) = V\left(\frac{1+3p^2}{p^2 q}\, s^2\right),$$

in welcher U und V zwei durch die Formeln

$$U(\Phi) \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial x} + p\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{1+p^2}{pq}\, s\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial p} + s\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial q} + \frac{1+3p^2}{p^2 q}\, s^2\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial s}$$

$$V(\Phi) \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial y} + q\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial z} + s\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial p} + \frac{1+q^2}{pq}\, s\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial q} + \frac{1+3q^2}{p q^2}\, s^2\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial s}$$

definierte Operationssymbole sind. Diese Relation aber ist eine blofse Identität, wie sich beim Ausrechnen zeigt. Hieraus folgt bereits, dafs unser System (7) unbeschränkt integrabel ist, dafs also die beiden Gleichungen, aus denen es besteht, eine gemeinschaftliche Lösung mit vier willkürlichen Konstanten besitzen müssen. Um diese Lösung zu finden, hat man die beiden linearen partiellen Differentialgleichungen

$$(10)\qquad U(\Phi) = 0, \quad V(\Phi) = 0$$

aufzustellen, in denen Φ eine unbekannte Funktion der sechs Variabeln x, y, z, p, q, s bedeutet; diese beiden Gleichungen bilden, wie sich leicht nachweisen läfst, ein zweigliedriges Jacobisches System*) und haben infolgedessen vier von einander unabhängige gemeinschaftliche Lösungen; solche Lösungen sind, wie man sofort verifizieren kann, die vier Funktionen

$$x - \frac{p^2 q}{s}, \quad y - \frac{p q^2}{s}, \quad z + \frac{pq}{s}, \quad \frac{pq\sqrt{1+p^2+q^2}}{s}.$$

Nun hat man diese vier Lösungen des Jacobischen Systems (10) ebensovielen willkürlichen Konstanten c_1, c_2, c_3, c_4, gleichzusetzen, also die vier Relationen

$$(11)\quad x - \frac{p^2 q}{s} = c_1, \quad y - \frac{p q^2}{s} = c_2, \quad z + \frac{pq}{s} = c_3, \quad \frac{pq\sqrt{1+p^2+q^2}}{s} = c_4$$

zu bilden, und die letzteren nach z, p, q, s aufzulösen; dabei ergeben sich die Gleichungen

$$(12)\left\{\begin{aligned} & z = c_3 + \sqrt{c_4{}^2 - (x-c_1)^2 - (y-c_2)^2}, \quad p = \frac{-(x-c_1)}{\sqrt{c_4{}^2 - (x-c_1)^2 - (y-c_2)^2}}, \\ & q = \frac{-(y-c_2)}{\sqrt{c_4{}^2 - (x-c_1)^2 - (y-c_2)^2}}, \quad s = \frac{-(x-c_1)(y-c_2)}{\left[\sqrt{c_4{}^2 - (x-c_1)^2 - (y-c_2)^2}\right]^3}. \end{aligned}\right.$$

Die erste dieser Gleichungen ist alsdann die verlangte allgemeinste Integralgleichung des Systems (7), und diese Gleichung enthält in der Tat vier willkürliche Konstanten. Geometrisch gedeutet aber stellt sie offenbar genau die ∞^4 Kugeloberflächen des Raumes dar.

---

*) Vergl. etwa Goursat-Bourlet: Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, § 26.