X. Graphische Bestimmung der Achsen des schiefen elliptischen Kegels.

Von **J. Ph. Weinmeister.**

Mit 3 Abbildungen.

Im folgenden soll die Aufgabe der Achsenbestimmung zunächst analytisch gelöst und dann das Ergebnis geometrisch gedeutet werden. Die Basisellipse (Mittelpunkt O) habe die Halbachsen a, b, die auf das Achsensystem der Ellipse bezogenen Koordinaten des Höhenfuſspunktes H seien p, q (beide positiv); endlich sei die Höhe $SH = h$. Sind nun P_1, P_2, P_3 die gesuchten Spurpunkte der Kegelachsen in der Basisebene, so hat das Dreieck $P_1 P_2 P_3$ den Punkt H zum Höhenschnittpunkt, und es ist das Produkt aus den Abschnitten einer jeden Höhe $= h^2$. Man kann daher auch sagen, daſs $\triangle P_1 P_2 P_3$ ein Polardreieck des Kreises um H mit dem Radius hi sei. Da es aber auſserdem ein Polardreieck der Basisellipse ist, so kann man die Aufgabe in folgender Fassung auf die Ebene übertragen:

Es soll das gemeinsame Polardreieck der Kurven mit den Gleichungen

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 + h^2 = 0 \quad \text{und} \quad x^2 b^2 + y^2 a^2 - a^2 b^2 = 0$$

gesucht werden.

Die Koordinaten des einen Punktes P seien x', y'. Dann müssen folgende Gleichungen identisch sein:

$$(1) \qquad \begin{aligned} x(x' - p) + y(y' - q) &= px' + qy' - p^2 - q^2 - h^2 \\ xx' b^2 + yy' a^2 &= a^2 b^2, \end{aligned}$$

oder die Werte x', y' müssen folgende Gleichungen befriedigen:

$$(2) \qquad \frac{x - p}{x b^2} = \frac{y - q}{y a^2} = \frac{px + qy - p^2 - q^2 - h^2}{a^2 b^2}.$$

Eliminiert man y, so erhält man für x die kubische Gleichung:

$$(3) \qquad \begin{aligned} & x^3 e^2 p - x^2 \left[a^2 e^2 + p^2 (a^2 + e^2) + q^2 (b^2 + e^2) + h^2 e^2\right] \\ & + x a^2 p (a^2 + e^2 + p^2 + q^2 + h^2) - a^4 p^2 = 0. \end{aligned}$$

Dies wäre die analytische Lösung der Aufgabe. Um nun die Punkte $P_1 P_2 P_3$ durch Zeichnung zu erhalten, suchen wir zwei Kegelschnitte, die sie als Kurvenpunkte enthalten. Da sich nun aber zwei Kegelschnitte in vier Punkten schneiden, so muſs sich auſser den gesuchten