Zeichnung.

Der Punkt F. H' sei der Spiegelpunkt von H in Beziehung auf die x-Achse. Dann liegt F auf OH', und zwar ist

$$OF : OH' = a^2 + b^2 : a^2 - b^2.$$

Die Hyperbel $H_1 = 0$. Aus (5) und (9) ergibt sich, dafs ihr Mittelpunkt M die Verbindungslinie HF halbiert. Die Asymptoten sind den Koordinatenachsen parallel. Weiter geht die Hyperbel durch die Punkte H und O. Es sei bemerkt, dafs sich dies von vornherein ergibt. Ist nämlich $h = 0$, so entartet der Kegel, und es fällt seine Spitze S mit H zusammen. Ist andererseits $h = \infty$, so entartet dieser schiefe elliptische Kegel zu einem geraden elliptischen Zylinder, und es liegt die Projektion von S in O.

Das Kreisbüschel $\mathfrak{K} = 0$ bei variierendem h.

Die gemeinsame Sekante ist OH'. Auf ihr liegt der Schnittpunkt F. Für den anderen Schnittpunkt G ergibt sich aus dem Absolutglied der Kreisgleichung $OG \cdot OF = a^2 + b^2$. Auch ist $OG \cdot OH' = e^2$.

Koordinaten des Schnittpunktes G:

$$(10) \qquad x = p\,\frac{a^2 - b^2}{p^2 + q^2}, \qquad y = -q\,\frac{a^2 - b^2}{p^2 + q^2}.$$

Man kann das Büschel auch noch auf andere Art bestimmen. Für $h = 0$ ergibt sich die eine Kegelachse als das in H auf die Ebene errichtete Lot. Die beiden anderen sind die auf einander senkrechten Harmonikalen des Punktes H. Man erhält sie bekanntlich, indem man die Winkel der Brennstrahlen dieses Punktes halbiert. Schneidet man dieselben durch die Polare von H, so erhält man das Polardreieck für den Fall $h = 0$. Der ihm umgeschriebene Kreis ergibt das Büschel.

Der Kreis $\mathfrak{K} = 0$.

Sucht man die Potenz des Punktes M für diesen Kreis, so erhält man $-\left(\frac{q^2 a^4}{e^2} + \frac{p^2 b^4}{e^2} + h^2\right) = -(MH^2 + h^2) = -MS^2$.

M liegt also innerhalb des Kreises. Man trage auf MH von M aus die Länge $MS^2 : MF$ ab und erhält so den zweiten Schnittpunkt des Kreises mit FM.

Die reziproke Polare der Hyperbel $\mathfrak{H}_1 = 0$ für die Ellipse ist ein Kegelschnitt, dem sämtliche Polardreiecke, die man durch Variieren von h erhält, anbeschrieben sind. Da die Hyperbel durch O geht, mufs dieser Kegelschnitt eine Parabel sein. Sie mufs aufserdem die Achsen berühren, also geht ihre Direktrix durch O und ebenso durch H. Der Brennpunkt liegt auf allen den Dreiecken umgeschriebenen Kreisen, also ist er einer der Schnittpunkte des Büschels. Er ist Punkt G.

Man setze in die linke Seite der Gleichung (3) im Hinblick auf die Punkte O, H, M für x die Werte ein: $0, p, p\frac{a^2}{e^2}, +\infty$, so erhält man der Reihe nach $-a^4 p^2, +h^2 p^2 b^2, -a^4 b^2 p^2 q^2 : e^4, +\infty$.

Hiernach liegen die Punkte P_1 und P_2 auf dem Hyperbelast durch O und H, und zwar liegt P_1 zwischen O und H, P_2 auf der Verlängerung des Bogens OH über H hinaus. P_3 gehört dem anderen Hyperbelast an.