durch den wir beim Zeichnen die mathematische Ellipse ersetzen. Es handelt sich also um die Länge des Bogens der mathematischen Ellipse, der im Innern des Kreisstreifens liegt; aber diese Länge hängt auch von der Gröfse von ε ab, und deshalb wollen wir, um in allen Fällen gleichmäfsig zu verfahren, ε immer so wählen, dafs der Bogen möglichst lang wird.

Wenn wir im folgenden von Kreis und Ellipse sprechen, so meinen wir immer den mathematischen Kreis und die mathematische Ellipse. Wir nehmen nun einen Punkt P unserer Ellipse und schneiden die Gerade KP mit dem Kreise k_r; die Strecke zwischen P und dem ihm nächsten der beiden Schnittpunkte bezeichnen wir als den kürzesten Abstand y des Punktes P vom Kreise k_r und geben y das positive oder negative Vorzeichen, je nachdem P aufserhalb oder innerhalb von k_r liegt. Dann ist die Potenz von P in bezug auf k_r gegeben durch

$$y(y+2r).$$

Ferner seien a und b ($a > b$) die Längen der grofsen und der kleinen Halbachse der Ellipse und ϑ die exzentrische Anomalie des Punktes P. Dann hat P in bezug auf die Achsen der Ellipse die rechtwinkeligen Koordinaten $a\cos\vartheta$ und $b\sin\vartheta$, und wir finden für seine Potenz in bezug auf den Kreis k_r auch den Wert $(1-\cos\vartheta)\,[(a^2-b^2)(1-\cos\vartheta)+2(b^2-ar)]$.

Diese beiden Ausdrücke für die Potenz des Punktes P in bezug auf den Kreis k_r führen zu der Gleichung

$$(1) \qquad y(y+2r) = (1-\cos\vartheta)\,[(a^2-b^2)(1-\cos\vartheta)+2(b^2-ar)],$$

durch die der Zusammenhang zwischen ϑ und y bestimmt ist. Wir müssen nun erstens die Grenzen aufsuchen, in die ϑ gebannt ist, wenn der absolute Wert von y die gegebene Gröfse δ nicht überschreiten soll, und zweitens den Wert von r ermitteln, für den diese Grenzen möglichst weite sind.

§ 3. Umformung und geometrische Deutung der Gleichung (1).

Im Scheitel A hat die gegebene Ellipse den Krümmungsradius

$$r_0 = \frac{b^2}{a}.$$

Wir setzen

$$r = r_0 + \varrho$$

und führen statt ϑ eine neue unabhängige Veränderliche

$$x = r_0(1-\cos\vartheta)$$

ein, von der für uns nur die Werte zwischen 0 und $2r_0$ in Betracht kommen:

$$0 \leqq x \leqq 2r_0;$$

hiermit nimmt die Gleichung (1) die folgende Gestalt an:

$$(2) \qquad [(a^2-b^2)x^2 - r_0^2 y^2 - 2r_0^3 y] - 2\varrho\,[b^2 x + r_0^2 y] = 0.$$

Die Gleichung (2) ist, wenn wir x und y als rechtwinkelige Koordinaten deuten, die Gleichung eines Kegelschnittes, der durch den Koordinatenursprung hindurchgeht; betrachten wir von ihm den Bogen, der vom Koordinatenursprung aus sich bis zur Geraden $x = 2r_0$ erstreckt, so sind die Ordinaten seiner Punkte gerade gleich den kürzesten Abständen der Punkte unserer Ellipse von dem Kreise k_r. Infolgedessen können wir das Verhalten der Ellipse gegen den Kreis k_r an dem Verhalten des Kegelschnittes (2) gegen die x-Achse studieren.