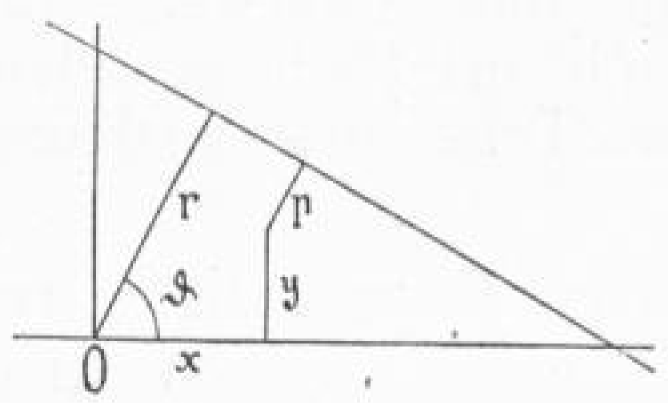
Sinne, denn er hat homogene Koordinaten eingeführt — gleich $-\frac{1}{u}$ und gleich $-\frac{1}{v}$. Wir wollen aber andere Koordinaten wählen, nämlich r, ϑ, die polaren Koordinaten des Fuſspunktes des vom Anfangspunkt auf die Gerade gefällten Lotes. Dann ist $r\,u = -\cos\vartheta$ und $r\,v = -\sin\vartheta$. Diese beiden Formeln führen aus einem System in das andere.

Ist eine Gleichung zwischen r und ϑ gegeben, so stellt diese demnach zwei Kurven dar, je nachdem man die Koordinaten r, ϑ als Linien- oder als Punktkoordinaten auffaſst. Von diesen beiden ist immer die letztere die Fuſspunktkurve der ersteren für den Koordinatenanfangspunkt als Pol.

Es seien uns jetzt gegeben eine Gerade $r\,\vartheta$ und ein Punkt $x\,y$. Dann ist $r - x\cos\vartheta - y\sin\vartheta = p$ der Abstand des Punktes $x\,y$ von der Geraden $r\,\vartheta$.

In den Anfangsgründen der analytischen Geometrie nimmt man x, y als Veränderliche; dann stellt diese Gleichung eine Gerade dar, die parallel der Geraden $r\,\vartheta$ ist und vom Anfangspunkt die Entfernung $r - p$ hat.

Fig. 1.



Hier ist aber $r\,\vartheta$ veränderlich, also ist: $r - x\cos\vartheta - y\sin\vartheta = p$ die Gleichung eines Kreises mit dem Mittelpunkt $x\,y$ und dem Radius p.

Ist $p = 0$, so erhalten wir $r - x\cos\vartheta - y\sin\vartheta = 0$, die Gleichung eines Punktes.

Anwendungen. Satz: Bewegt sich eine Gerade so, daſs die Summe ihrer Abstände von n Punkten ungeändert bleibt, so hüllt sie einen Kreis ein. (NB. Dieser Satz hat schon vor hundert Jahren in Gergonnes Annalen gestanden.)

Beweis: Die n Punkte seien $x_1\,y_1$, $x_2\,y_2$, ... $x_n\,y_n$; die Summe der Abstände von der sich bewegenden Geraden $r\,\vartheta$ sei p, dann folgt

$$\left.\begin{array}{l} r - x_1\cos\vartheta - y_1\sin\vartheta \\ + r - x_2\cos\vartheta - y_2\sin\vartheta \\ \quad\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ + r - x_n\cos\vartheta - y_n\sin\vartheta \end{array}\right\} = p, \text{ oder}$$

$$r - \frac{x_1 + x_2 + \cdots x_n}{n}\cos\vartheta - \frac{y_1 + y_2 + \cdots y_n}{n}\sin\vartheta = \frac{p}{n}.$$

Das ist aber die Gleichung eines Kreises, der den Massenmittelpunkt der Punkte $x_1\,y_1$, ... $x_n\,y_n$ zum Mittelpunkt hat und $\frac{p}{n}$ zum Radius.

Nun seien zwei Punkte F_1 und F_2 mit den Koordinaten x_1, y_1 resp. x_2, y_2 gegeben. Ihre Abstände von der Geraden $r\,\vartheta$ sind dann $r - x_1\cos\vartheta - y_1\sin\vartheta$ bez. $r - x_2\cos\vartheta - y_2\sin\vartheta$. Bewegt sich nun die Gerade so, daſs die Abstände der Punkte F_1 und F_2 von ihr ein konstantes Verhältnis haben, so folgt $r\,(c-1) - (c\,x_2 - x_1)\cos\vartheta - (c\,y_2 - y_1)\sin\vartheta = 0$, die Gleichung eines Punktes. Bewegt sich also eine Gerade so, daſs die Abstände zweier Punkte von ihr ein konstantes Verhältnis haben, so dreht sie sich um einen Punkt.

Bedenkt man, daſs das Produkt der Lote, welche von den Brennpunkten einer Ellipse bez. Hyperbel auf eine bewegliche Tangente dieser