

III. Die Realität der Wendepunkte irrationaler Kurven dritter Ordnung.

Von Prof. Dr. Richard Heger.

Mit 1 Abbildung.

Das Auftreten von Wendepunkten an Kurven III. Ordnung ist bereits von Newton bemerkt worden. Im Jahre 1748 gab Maclaurin den Satz, daß die Gerade zweier Wendepunkte eine Kurve III. Ordnung noch einen dritten Wendepunkt mit der Kurve gemein hat. Die Grundlegung der Lehre von den Wendepunkten, die wir heute kennen, erfolgte erst viel später, durch Julius Plücker, der sie 1835 in seinem berühmten „System der analytischen Geometrie“ veröffentlichte. Plücker war sich der wissenschaftlichen Bedeutung des von ihm Dargebotenen voll bewußt; in der Vorrede sagt er: „Vor allem findet man neue und fast die ersten Untersuchungen über Wendungspunkte, deren Betrachtung zu den subtilsten, die die Geometrie bietet, zu gehören scheint. Ich gebe ihre allgemeine Konstruktion und bestimme namentlich ihre Anzahl bei algebraischen Kurven. Die Kurven der III. Ordnung haben im allgemeinen neun Wendungspunkte, und unter diesen sind immer drei reelle und sechs imaginäre. Die Diskussion hierüber knüpft sich an Gleichungen, deren Grad zu hoch ansteigt, als daß wir auf dem Wege der bloßen Elimination zu einem Resultate kommen könnten. Die unmittelbare Anschauung muß wenigstens einen neuen, noch verwegeneren Flug nehmen als bisher, um das zu begreifen, was in allen Fällen imaginär ist und imaginär bleibt. Unsere Methode führt hier leicht zum Ziele; ja, unmittelbar sogar erkennen wir in der Form

$$pqr + \mu s^3 = 0$$

die Notwendigkeit der obigen Behauptung, daß eine Kurve III. Ordnung immer neun Wendungspunkte hat, von denen immer sechs imaginär sind“.

Mit dem Beweise dieses letzten Satzes werden wir uns heute beschäftigen.

Zwischen den so zuversichtlichen Worten der Vorrede und dem Inhalte des Werkes besteht eine gewisse, unverkennbare Unstimmigkeit. Der Beweis unseres Lehrsatzes wird nämlich an keiner Stelle des Werkes allgemein, vollständig und zwingend vorgetragen. Einen seiner Beweise hat Plücker allerdings vollständig und einwandfrei durchgeführt, aber dieser bezieht sich nicht auf den allgemeinen Fall, sondern nur auf eine besondere Gruppe von Kurven III. Ordnung. Schon zu Plückers Zeiten lag

*