ein Verfahren nahe, diesen Beweis zur Allgemeingültigkeit zu erheben; aber Plücker ist nicht darauf zugekommen. Der andere von Plücker gegebene Beweis kann nicht als zutreffend bezeichnet werden.

Unter Plückers Nachfolgern in bezug auf den Beweis unseres Satzes ist zunächst Cremona zu nennen. Er beruft sich auf einen von ihm aufgefundenen Satz über äquianharmonische Punktgruppen, der aber in der verwendeten Gestalt nicht gültig ist; auf denselben Satz bezieht sich Schröter. Vor Schröter gab Durège einen Beweis, der ebenfalls zurückgewiesen werden muſs. Den einzigen vollständigen und einwandfreien Beweis verdanken wir Clebsch, der ihn teils unter Berufung auf geometrische Anschauung, teils analytisch geometrisch führt. Zum Schlusse werden wir einen rein analytisch-geometrischen Beweis hinzufügen.

Wir wenden uns nun zu Plücker zurück. Der dritte Abschnitt des „Systems der analytischen Geometrie“, der mehr als die Hälfte des ganzen Werkes umfaſst, ist, abgesehen von einigen allgemeinen Untersuchungen, den Kurven III. Ordnung gewidmet. In § 5 gibt Plücker eine Einteilung dieser Kurven in 219 Klassen, wobei er die Asymptoten als Einteilungsgrund verwendet. Von Wendepunkten ist bis an diese Stelle nur gelegentlich, bei besonderen Kurven, die Rede gewesen; die allgemeinen Untersuchungen über die Wendepunkte der Kurven III. Ordnung, besonders über deren Anzahl, folgen erst später. Immerhin wird der Begriff eines Wendepunktes einer Kurve III. Ordnung bereits vor Eintritt in den § 5 festgestellt. Bei der den § 5 erfüllenden kurzen Beschreibung aller 219 Klassen wird in den meisten Fällen die Anzahl der realen Wendepunkte angegeben. Am Anfange der Beschreibung gibt Plücker in einer Fuſsnote einen geometrischen Beweis dafür, daſs eine Kurve III. Ordnung mit drei realen Asymptoten, die ein ganz im Endlichen liegendes, nicht verschwindend kleines Dreieck begrenzen, und deren im Endlichen gelegene Schnittpunkte mit der Kurve auſserhalb des Asymptotendreiecks liegen, drei reale Wendepunkte hat. Diese Kurven der 1. Plückerschen Art bestehen aus zwei Zügen; der erste liegt ganz im Innern des Asymptotendreiecks und ist geschlossen; der andere kann auch als geschlossener Zug betrachtet werden, „wenn man in Erwägung zieht, daſs jeder Zug, der an einer Asymptote sich immer weiter hinzieht, durch das Unendliche hindurchgehend, auf der andern Seite der Asymptote und nach ihrer entgegengesetzten Erstreckung wieder erscheint“.

Plücker macht hier folgende Anmerkung: „Wenn ein Zweig einer Kurve eine gerade Linie schneidet und nachher an derselben als seiner Asymptote sich hinzieht, so hat er notwendig einen Wendungspunkt. Denn für denselben gibt es, nachdem er die Asymptote geschnitten hat, offenbar ein Maximum der Entfernung von dieser Asymptote, und diesem Maximum entspricht, daſs die Tangente der Kurve der Asymptote parallel ist. Rückt die Tangente, von dieser Lage aus, immer weiter fort, bis sie endlich mit der Asymptote zusammenfällt, so erreicht sie, zwischen diesen beiden parallelen Grenzlagen, wenigstens einmal eine solche Lage, in der ihre Neigung gegen die Asymptote ein Maximum ist. Ihr Fortrücken wird in dieser Lage gehemmt und erfolgt nachher in entgegengesetztem Sinne. Die Tangente in dieser Lage berührt die Kurve in einem Wendungspunkte“.

Indem Plücker diese Betrachtung auf die Kurven III. Ordnung 1. Art anwendet, schlieſst er, daſs es hier drei reale Wendepunkte gibt. Richtiger