wäre es gewesen, zu behaupten, daſs **wenigstens** drei reale Wendepunkte vorhanden sein müssen; die Beschränkung auf drei wird hier in keiner Weise bewiesen. Erwünscht wäre, wenn Plücker an dieser Stelle der Vollständigkeit wegen die naheliegende Bemerkung gemacht hätte, daſs seine Schluſsweise nicht für Kurvenzweige gilt, die einen Doppelpunkt oder einen Rückkehrpunkt enthalten.

Für den Fall, daſs eine Kurve III. Ordnung nur **eine** reale Asymptote hat, neben zwei konjugiert komplexen, behauptet Plücker das Vorhandensein von (wenigstens) drei realen Wendepunkten **ohne jeden Beweis**. Vielleicht hielt er den Beweis für so naheliegend, daſs er ihn glaubte übergehen zu dürfen. Er hätte diesen Fall auf den dreier realer Asymptoten in folgender Weise zurückführen können: Verbindet man zwei beliebige reale Punkte P und Q der Kurve durch eine Gerade a, so hat diese noch einen dritten realen Punkt R mit der Kurve gemein, der im allgemeinen nicht unendlich fern ist. Entwirft man von der Figur ein Mittenbild auf eine Ebene, auf die sich a als unendlich ferne Gerade abbildet, so ergibt die Kurve ein Bild mit drei realen Asymptoten. Da nun hierbei die Wendepunkte erhalten bleiben, so folgt, daſs **jede** irrationale Kurve III. Ordnung wenigstens drei reale Wendepunkte haben muſs. An diese Schluſsweise hat Plücker offenbar nicht gedacht, sonst würde er eine darauf bezügliche Bemerkung gemacht haben. Immerhin kann man gegen die Anwendung dieses Beweisverfahrens das pädagogische Bedenken haben, daſs es auf gewissen geometrischen Anschauungen beruht, die bei dem Anfänger wenigstens noch nicht so entwickelt und befestigt sind, um als Grundlage für einen so wichtigen Lehrsatz dienen zu können. Bei einem analytisch-geometrischen Lehrgange unterbricht zudem ein rein geometrischer Schluſs die analytische Entwickelung in unwillkommener Weise.

Zu den 219 Klassen hat Plücker ebensoviele, in 61 Gruppen zusammengefaſste Figuren auf fünf Kupfertafeln beigegeben. Für diesen umfassenden Einblick in den Formenreichtum der Kurven III. Ordnung muſs man Plücker danken; daneben kann aber die Bemerkung nicht unterdrückt werden, daſs mehrere der Figuren nur unzulängliche Skizzen sind. Wiederholt kommt es vor, daſs ein Kurvenzug als Teil von mehreren Kurven III. Ordnung gelten soll. An einigen Stellen sind die Figuren falsch bezeichnet*). Die realen drei Wendepunkte sind wiederholt da, wo sie vorkommen sollten, nicht erreicht und nirgends hervorgehoben.

In der Nr. 296 wird der Begriff Wendepunkt für eine Kurve n-ter Ordnung festgestellt; in 298 wird der Satz gewonnen, daſs eine Kurve n-ter Ordnung im allgemeinen $3n^2-6n$ Wendepunkte hat; in 299 wird eine Kurve III. Ordnung abgeleitet, die durch die Wendepunkte einer gegebenen Kurve III. Ordnung hindurchgeht. Dann folgt der Beweis dafür, daſs **eine Kurve III. Ordnung mit drei unendlich fernen realen Wendepunkten** auſserdem noch sechs imaginäre Wendepunkte haben muſs. Man kann diesen Beweis sofort zur Allgemeingültigkeit ergänzen, wenn man von einer Kurve, die drei reale Wendepunkte auf einer nicht unendlich fernen Geraden hat, ein Mittenbild entwirft, wobei das Bild der Geraden der drei realen Wendepunkte unendlich fern ist. Wir geben Plückers Beweis in neuerer Ausdrucksweise wieder, und zwar sofort für den allge-

*) Zur 78. bis 85. Art sollen, wie auf S. 229 steht, die Figuren XVIII, Nr. 4 bis 8 gehören, die es aber gar nicht gibt.

**