wiederholt ausgesprochen hat, gibt er doch im Schlufsparagraphen des „Systems“ noch weitere Beweisversuche. Dieser letzte Abschnitt ist ausschliefslich dem weiteren Ausbaue der Lehre von den Wendepunkten gewidmet und darauf begründet, dafs man jeder binären kubischen Funktion die Gestalt geben kann

6) $$pqr + \mu s^3 = 0,$$

wobei pqr und s lineare Funktionen sind. Die Frage, ob diese bei jeder realen Kurve III. Ordnung real bestimmt werden können, wird zunächst nicht in Angriff genommen.

Von der Form 6) ausgehend, kommt Plücker zu der von der Frage der Realität der Wendepunkte nicht abhängenden höchst bedeutenden Entdeckung, dafs die neun Wendepunkte einer Kurve III. Ordnung zu je dreien auf 12 Geraden liegen und erkennt, dafs neben der Geraden der drei realen Wendepunkte noch drei Wendepunktsgerade real sind, deren jede durch einen der drei realen Wendepunkte geht. In der nächsten Nummer (Nr. 323) fährt Plücker fort:

„Die direkte Nachweisung, dafs und unter welchen Modifikationen die allgemeine Gleichung III. Grades zwischen zwei Veränderlichen sich immer in die Form

$$pqr + \mu s^3 = 0$$

bringen läfst, beruht auf der Diskussion von Gleichungen, die wenigstens den 12. Grad erreichen, und die wir auf dieselbe Weise, als wir es im ersten Paragraphen dieses Abschnitts getan haben, einleiten können. Was dort aber leicht möglich war, weil die bezügliche Umgestaltung (nämlich in $pqr + \mu s = 0$) nur auf einzige Weise stattfand, wird hier, wenigstens praktisch, unausführbar. Allen diesen algebraischen Entwicklungen sind wir in der Diskussion der vorigen Nummer (322) überhoben worden, indem wir die obige Form der Gleichung mit dem schon bewiesenen Resultate, dafs eine Kurve III. Ordnung im allgemeinen neun Wendungspunkte und unter diesen immer drei reelle und sechs imaginäre hat, in Verbindung gebracht haben. Wir können aber den Gesichtspunkt für diese Diskussion noch höher wählen, indem wir die Notwendigkeit des eben erwähnten Resultats durch unmittelbare Betrachtungen ebenfalls wieder aus der Form der Gleichung

$$pqr + \mu s^3 = 0$$

ableiten.“

Der unmittelbare Beweis Plückers gliedert sich in vier Teile. Aus der Möglichkeit der obigen Gleichungsform schliefst Plücker zunächst, dafs immer drei Wendepunkte vorhanden sind, die in gerader Linie liegen und entweder real oder imaginär sind.

Hierauf wird bewiesen, dafs eine Kurve III. Ordnung nicht mehr als drei reale Wendepunkte haben kann. „Denn“, sagt Plücker, „die Linie, die irgend zwei reale Wendepunkte verbindet, schneidet die Kurve in einem dritten realen Punkte, der ebenfalls ein Wendepunkt ist; und es gibt kein System von mehr als drei realen Punkten, von denen je zwei mit einem und nur mit einem einzigen dritten in gerader Linie liegen“. Für diesen Satz bleibt aber Plücker den Beweis schuldig; er dürfte auch nicht von andrer Seite bewiesen worden sein. Vorher, als Bemerkung zu Nr. 322, wird behauptet, dafs nicht jede Anzahl von Elementen sich so zu dreien kombinieren lasse, dafs in den verschiedenen Gruppen alle Kombinationen