zweier Elemente vorkommen, und jede derselben nur ein einziges Mal; die Zahl solcher Elemente sei notwendig von der Form $6n+3$. Diese Bemerkung ist nicht ganz richtig; es geht auch bei $6n+1$ Elementen; z. B. bei 7 Elementen erhält man 123, 145, 167, 246, 257, 347, 356.

Nun wollte Plücker noch analytisch beweisen, dafs es mehr als einen realen Wendepunkt geben mufs. Er sagt darüber: „Die imaginären Wendungspunkte sind in gerader Zahl vorhanden und gehören paarweise so zusammen, dafs eine reale Gerade durch die beiden Punkte jeden Paares geht und die Kurve aufserdem noch in einem realen Punkte schneidet. Es gibt hiernach doppelt so viele imaginäre als reale Wendungspunkte.“ Der erste dieser Sätze ist zweifellos richtig, da die Wendepunkte die Schnittpunkte zweier realer Kurven III. Ordnung sind. Das „hiernach“ des zweiten Satzes ist aber am unrichtigen Platze, denn dieser Satz bedarf des Beweises. Das hat auch Plücker empfunden, denn er fährt fort: „Denn da in der Gleichung 6) die (reellen) Funktionen p, q und r beliebig miteinander vertauscht werden können, so stehen die reellen Wendungspunkte alle drei in derselben Beziehung zur Kurve, und offenbar kann nicht einer derselben mit mehr Paaren imaginärer Wendungspunkte in gerader Linie liegen, als ein anderer“. Diese Bemerkung durfte aber an dieser Stelle nicht gemacht werden, wo es ja eben darauf ankam, zu beweisen, dafs nicht blos ein realer Wendepunkt vorhanden ist; läfst man aber das von Plücker eingeklammerte Wort reellen hinweg, so kann auf die rein formale Vertauschbarkeit der Faktoren p, q und r natürlich keine Aussage über die Realität der Wendepunktsgeraden begründet werden.

Der vierte Teil des Plückerschen unmittelbaren Beweises lautet: „Es sind hiernach nur noch zwei Fälle möglich: entweder hat die Kurve III. Ordnung einen reellen und zwei imaginäre, oder drei reelle und sechs imaginäre Wendungspunkte. Weil augenfällig die Gleichung des dritten Grades nicht auf blofs einzige Art die Form 6) annehmen kann, so ist der zweite Fall allein statthaft.“ Da über die Realität der Funktionen pqr und s gar nichts ausgesagt werden kann, so kann auch aus der Möglichkeit, die Form 6) in mehrfacher Weise herzustellen, kein Schlufs auf die Realität der Wendepunkte und der Wendepunktsgeraden gezogen werden.

In einer Randbemerkung zu Nr. 323 wird noch gesagt: „Es können nicht neun Wendungspunkte und unter diesen vier Paare imaginärer vorhanden sein. Dann müfste nämlich der einzige reelle Wendungspunkt mit diesen vier Paaren auf vier verschiedenen geraden Linien liegen und sonst in keiner (geradlinigen) Kombination mehr vorkommen. Die Anzahl der imaginären Wendungspunkte müfste also ebenfalls von der Form $6n+3$ sein“. Dies ist aber in doppelter Beziehung unzutreffend; erstens müfste es heifsen $6n+3$ oder $6n+1$; und zweitens ist die ganze Schlufsweise nicht richtig, denn jeder reale und irreale Wendepunkt liegt tatsächlich mit den vier Paar übrigen Wendepunkten auf vier Geraden, ohne dafs daraus ein Schlufs auf die Zahlen $6n+3$ oder $6n+1$ gemacht werden könnte.

Hieraus ergibt sich, dafs der unmittelbare, in Nr. 323 gegebene Beweis des Plückerschen Satzes kraftlos ist.

Auf die von Plücker entdeckte Figur der 12 Wendepunktsgeraden, sowie auf die wissenschaftlichen Hilfsmittel, die wir Möbius' im Jahre 1827 erschienenen barycentrischen Calcül, sowie Steiners 1832 erschienenen systematischen Entwicklungen verdanken, unter Ausschlufs