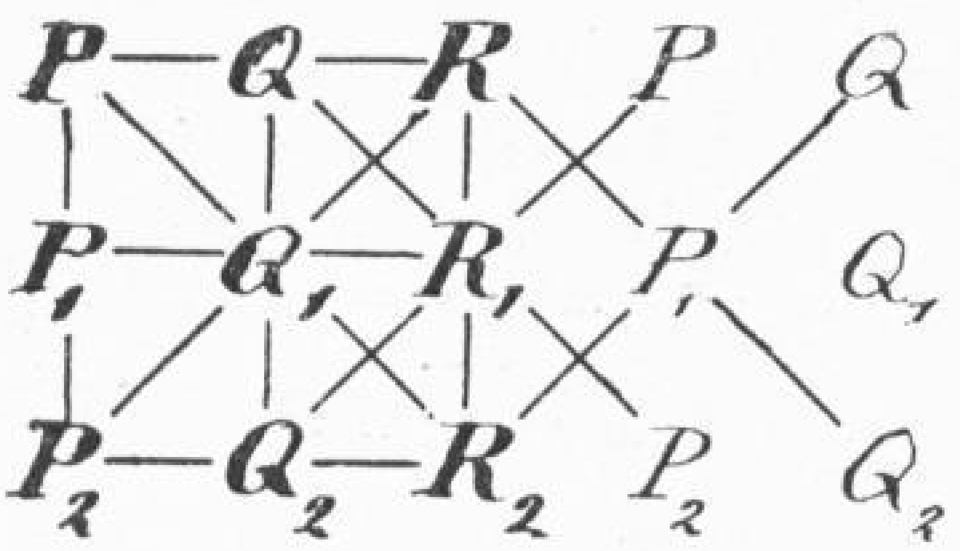
aber der erst im Jahre 1862 von Cremona entdeckten äquianharmonischen Eigenschaften der Wendepunktsfigur, läſst sich beweisen, daſs eine Kurve III. Ordnung nicht mehr als drei reale Wendepunkte haben kann. Dies gibt in Verbindung mit Plückers geometrischem Beweise für das Vorhandensein dreier realer Wendepunkte einen zweiten allgemeinen Beweis des Plückerschen Satzes.

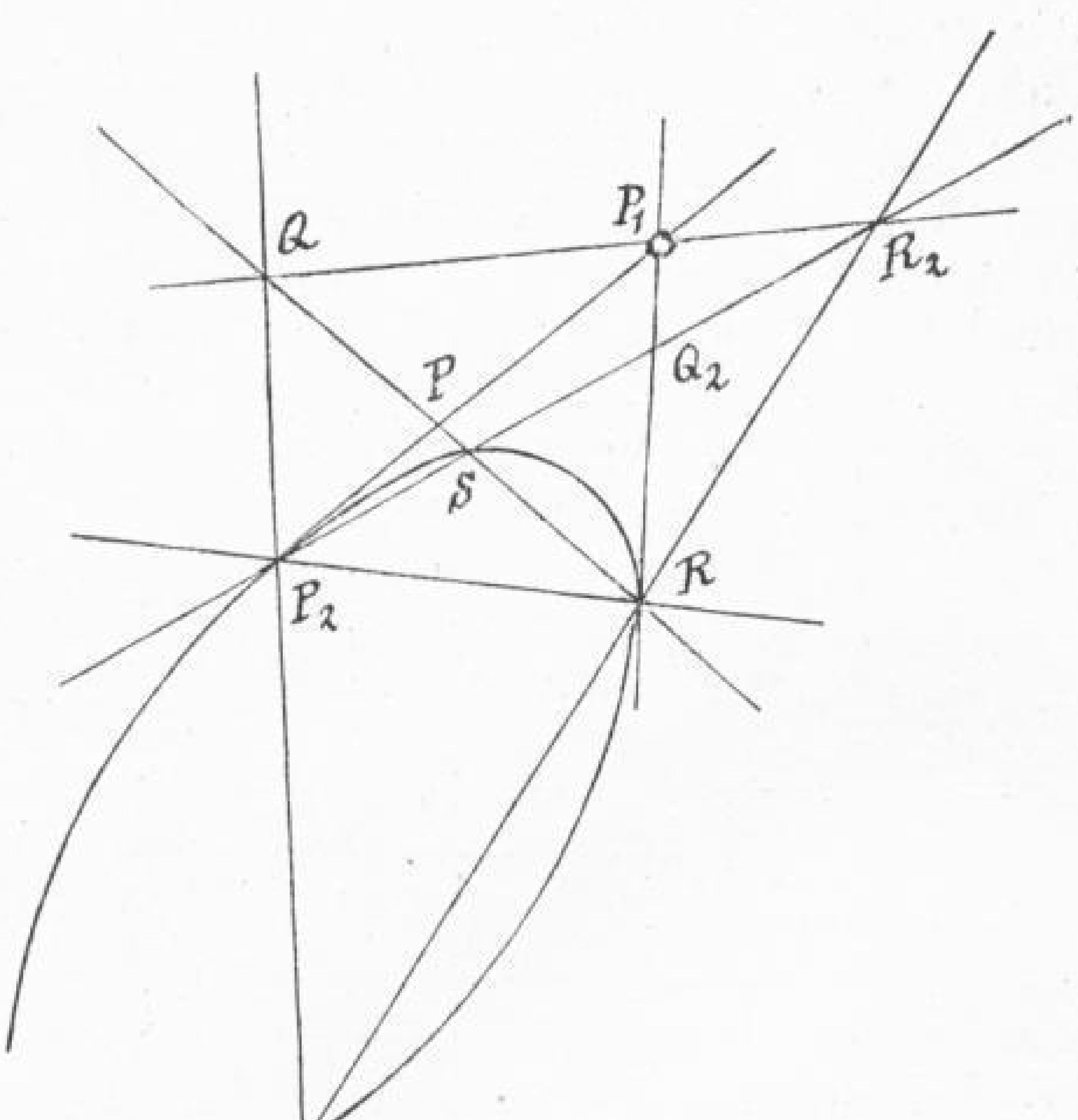
Sind P, Q, R drei Wendepunkte auf einer Geraden, P_1 P_2 Wendepunkte auf einer Geraden des P, Q_1 Q_2 Wendepunkte auf einer Geraden des Q, und ist R_1 der dritte auf P_1 Q_1 enthaltene Wendepunkt, so schneiden sich die Geraden $R R_1$ und P_2 Q_2 auf der Kurve, und zwar in ihrem neunten Wendepunkte R_2. Die Gerade $P Q_1$ enthält noch einen Wendepunkt; da dies weder P_1, noch P_2 oder Q, Q_2, R, R_1 sein können, so muſs es R_2 sein. Ebenso ergeben sich die Geraden $P Q_2 R_1$, $P_1 Q R_2$, $P_1 Q_2 R$, $P_2 Q R_1$, $P_2 Q_1 R$. Schreibt man die Wendepunkte in dieser Anordnung auf,

7)



so verbinden die drei wagerechten, die drei senkrechten, sowie die sechs schrägen Linien immer je drei Wendepunkte, die auf einer Geraden liegen.

Wie die Zusammenstellung sofort zeigt, werden die Punktreihen PR und P_2 Q_2 von P_1 aus auf einander abgebildet, und zwar sind P_2 und Q_2 die Bilder von P und R; ferner ist R_2 das Bild von Q und die drei Geraden PR_2, $P_2 Q$, $P Q_2$ müssen einen gemeinsamen Punkt haben, nämlich R_1.



Es fragt sich nun, ob und wie man Q auf PR so wählen kann, daſs $R R_2$ und $P_2 Q$ sich auf $P Q_2$ schneiden. Verschiebt man Q entlang $R P$, so beschreibt das Bild R_2 eine Reihe, die zu der von Q beschriebenen perspektiv ist, und die Strahlen $P_2 Q$ und $R R_2$ erzeugen einen Kegelschnitt K, der $R P_1$ und $P_2 P_1$ in R und P_2 berührt und den Schnittpunkt S von $R P$ und $P_2 Q_2$ enthält, wodurch er eindeutig bestimmt ist. Hieraus folgt, daſs R_1 ein Schnittpunkt von K mit $P Q_2$ sein muſs. Für das Achsendreieck $R P_1 P_2$ hat K eine Gleichung von der Form

8)
$$x_1^2 - a\, x_2\, x_3 = 0,$$