wobei x_1, x_2, x_3 die Punktabstände von $R P_2$, $R P_1$ und $P_2 P_1$ sind. Hat $P Q_2$ die Gleichung

9)
$$x_1 - m x_2 - n x_3 = 0,$$

so ist für P

10)
$$x_1 : x_2 = m,$$

und für Q_2

11)
$$x_1 : x_3 = n.$$

Da S auf $P_2 Q_2$ und $R P$ liegt, so gelten für die Koordinaten von S die Verhältnisse 10) und 11; da S ferner auf K enthalten ist, so kann man 10) und 11) in 8) einführen, und erhält daraus

12)
$$1 - \frac{a}{m n} = 0, \qquad a = m n.$$

Entfernt man x_1 aus 8) und 9), so folgt

$$m^2 x_2^2 + (2 m n - a) x_2 x_3 + n^2 x_3^2 = 0,$$

oder mit Rücksicht auf 12)

$$m^2 x_2^2 + m n x_2 x_3 + n^2 x_3^2 = 0.$$

Die Diskriminante dieser Gleichung ist

$$m^2 n^2 - 4 m^2 n^2 = - 3 m^2 n^2,$$

die Gleichung hat also unter allen Umständen irreale Wurzeln.

Hiermit ist bewiesen, daſs eine Kurve III. Ordnung nicht mehr als drei reale Wendepunkte haben kann.

Zehn Jahre nach dem Erscheinen von Plückers „System“ veröffentlichte Hesse im 28. Bande von Crelles Journal die erste seiner berühmten Abhandlungen über die Wendepunkte der Kurve III. Ordnung. Einige Jahre später erschienen weitere Abhandlungen im 36. und 38. Bande. Durch diese klassischen Arbeiten wurde die Lehre von den Wendepunkten wesentlich gefördert, auf die Frage nach der Realität der Wendepunkte geht aber Hesse an diesen Stellen nicht ein. In seinem weitverbreiteten Buche Ebene Kurven III. Ordnung, das 1871 erschien, gibt Durège (in Nr. 354) den Inhalt der Hesseschen Arbeit aus Crelle Bd. 38 im wesentlichen wieder. Von der Möglichkeit, einer homogenen ternären kubischen Funktion die Gestalt zu geben

$$A^3 + B^3 + C^3 + k A B C,$$

wobei A, B, C homogen linear sind, wird dabei ausgegangen; ohne die Frage zu berühren, ob diese Umgestaltung immer auf ein reales Dreieck $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ führt, werden diese Geraden ohne weiteres als Achsen einer Koordinatenbestimmung verwendet; dann findet sich freilich leicht, daſs drei Wendepunkte real, die andern irreal sind, aber diese Schluſsweise ist leider ein logisches Schulbeispiel der Petitio principii. Damit fällt natürlich auch Durèges Beweis für die Realität von vier Wendepunktsgeraden.

Im Jahre 1862 gab Cremona in seiner „Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane“ (gelesen in der Akademie der Wissenschaften zu Bologna am 19. Dezember 1861, veröffentlicht am 10. Oktober 1862 im 12. Bande der Abhandlungen der genannten Akademie) den neuen Begriff der äquianharmonischen Gruppe und wies Äquianharmonien an der Figur

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
SMWK
ISIS Naturwissenschaftliche Gesellschaft zu Dresden e.V.