der Wendepunkte der Kurven III. Ordnung nach. Auf diese Eigenschaften begründet er einen Beweis für den Plückerschen Wendepunktssatz.

Ausgehend von der gesicherten Erkenntnis, dafs es immer einen realen Wendepunkt i geben mufs, weist er nach, dafs zu diesem eine reale Wendepolare I gehört, die dieselbe für alle Glieder des durch die Wendepunkte der gegebenen Kurve III. Ordnung bestimmten syzygetischen Büschels ist. Von den Gliedern dieses Büschels wird I in den Dreipunktsgruppen einer kubischen Involution geschnitten. An vier Stellen $r\,r_1\,r_2\,r_3$ von I fallen zwei Punkte einer gewissen Dreipunktsgruppe zusammen; dies sind Scheitel je eines der vier Wendepunktsdreiseite, der Glieder des Büschels, die in Dreiseite zerfallen.

Es wird nun nachgewiesen, dafs jede der 12 Gruppen $r\,r_1\,r_2\,r_3$ äquianharmonisch ist (Nr. 144). Cremona fährt hierauf fort: „Ne consegue che, se i è un flesso reale delle cubiche sizigetiche, due de quattro vertici r giacenti nella polare armonica I sono reali, gli altri due imaginari (26).“ Die Nr. 26, auf die hier zurückverwiesen wird, enthält mit der folgenden zusammen alles, was Cremona über die Äquianharmonie von Vierpunktsgruppen mitteilt. Über ihre Realität bemerkt er, dafs, wenn $abcd'$ und $abcd''$ äquianharmonisch sind, also

$$(abcd') = \varepsilon', \quad (abcd'') = \varepsilon'',$$

wobei ε' und ε'' die konjugiert komplexen Kubikwurzeln der negativen Einheit bezeichnen, zu drei realen Punkten abc konjugiert komplexe d' und d'' gehören; sind dagegen zwei von den drei Punkten abc konjugiert komplex, so behauptet Cremona, dafs d' und d'' real sind. Die letzte Bemerkung ist bereits von Clebsch (Vorlesungen über Geometrie, 1. Aufl. 1876, S. 41) richtig gestellt worden; sind von $abcd'$ zwei Punkte konjugiert komplex, so können die andern beiden real sein, im allgemeinen aber sind sie komplex. Man kann über die Realität von vier äquianharmonischen Punkten nicht mehr aussagen, als dafs nicht alle vier real sein können; zu drei beliebigen realen oder irrealen Punkten ergibt sich im allgemeinen ein vierter irrealer Punkt. Irgend ein Zusammenhang zwischen der Realität eines Wendepunkts i und der Realität der auf der zugehörigen Wendepolare I gelegenen Ecken $r\,r_1\,r_2\,r_3$ der vier Wendepunktsdreiseite wird von Cremona nicht nachgewiesen. Auch die Gleichung $(rm)^3 + 8\,h^3 = 0$, deren Wurzeln die Strecken rr_1, rr_2 und rr_3 sind, gestattet keinen solchen Schlufs, weil über die Realität von r und h bis zu der Stelle, wo diese Gleichung auftritt und weiter verwendet wird, nichts ausgesagt worden ist, also mit der Möglichkeit irrealer Werte für r und h gerechnet werden mufs. Cremonas Beweis des Plückerschen Wendepunktssatzes ist daher ungültig.

Dasselbe gilt aus ganz demselben Grunde für den Beweis, den Schröter in seiner Theorie der ebenen Kurven III. Ordnung (1888, S. 236) gegeben hat.

Clebsch geht bei seinem Beweise (Vorlesungen über Geometrie, 1. Aufl.) davon aus, dafs eine Gerade t, die eine irrationale Kurve III. Ordnung in einem realen gewöhnlichen Punkte berührt und daher mit derselben noch einen realen Punkt A gemein hat, sich um A so drehen läfst, dafs sie in eine neue Lage t_1 kommt, wo sie aufser A keinen realen Punkt mit der Kurve gemein hat. Erzeugt man von der Figur ein Mittenbild, bei dem t_1 als unendlich ferne Gerade abgebildet wird, so hat das Bild C' der gegebenen Kurve C