nur eine reale Asymptote, nämlich das Bild u' der Geraden u, die C in A berührt. Die Kurve C' hat daher einen Zug, der von einem gewissen realen Punkte der Geraden u' aus nach beiden Seiten hin sich entlang dieser Geraden ins Unendliche erstreckt. Hieraus folgt, dafs dieser Zug wenigstens drei reale Wendepunkte haben mufs.

Aufser diesem Zuge hat C' noch einen ganz im Endlichen liegendes Oval, das aber auch irreal sein kann. Da, wie schon bemerkt, Wendepunkte bei Mittenabbildung erhalten bleiben, so ist damit bewiesen, dafs jede Kurve III. Ordnung wenigstens drei reale Wendepunkte haben mufs. Den Beweis dafür, dafs nicht mehr als drei reale Wendepunkte möglich sind, führt Clebsch mit Hilfe der äquianharmonischen Eigenschaften der Wendepunktsfigur. Sind die vier Wendepunkte $P\,Q\,R\,P_1$ real, so müssen auch P_2, Q_2 und R_2, sowie ferner Q_1 und R_1, also alle Wendepunkte und damit auch die 12 Wendepunktsgeraden, real sein. Sind nun S' und S'' die Schnittpunkte der Wendepunktsgeraden $P\,Q\,R$ mit $P_2\,Q_2\,R_2$ und $P_1\,Q_1\,R_1$, so erkennt man aus der Übersicht der Wendepunktsgeraden (Nr. 7), dafs die beiden perspektiven Büschel

$$P_2\,(P_1\,Q_1\,R_1\,S'') \text{ und } Q_2\,(P_1\,Q_1\,R_1\,S'')$$

die Wendepunktsgerade $S'\,S''$ in den Punktgruppen

$$P\,R\,Q\,S'' \text{ und } R\,Q\,P\,S''$$

schneiden. Man schliefst hieraus die Gleichheit der Doppelverhältnisse

$$(S''\,P\,Q\,R) = (S''\,Q\,R\,P);$$

woraus folgt, dafs $S''\,P\,Q\,R$ (und in gleicher Weise $S'\,P\,Q\,R$) äquianharmonisch sind. Hieraus folgt weiter, dafs nicht alle vier Punkte real sein können. Mithin können nicht mehr als drei Wendepunkte real sein.

Die geometrischen Betrachtungen in den ersten Teilen der von Plücker und von Clebsch gegebenen Beweise können vermieden werden, wenn man folgenden Weg einschlägt.

Wir beziehen die Gleichung der Kurve III. Ordnung auf ein Dreieck $A_1\,A_2\,A_3$, in dem A_3 ein realer Wendepunkt, $A_1\,A_2$ die zugehörigen Wendepolare, $A_3\,A_2$ Wendetangente und A_1 ein realer Punkt der Kurve ist, diese mithin in A_1 von $A_1\,A_3$ berührt wird. Die Kurvengleichung hat alsdann die Form

$$F \equiv 3\,a_{112}\,x_1^2\,x_2 + 3\,a_{122}\,x_1\,x_2^2 + 3\,a_{133}\,x_1\,x_3^2 + a_{222}\,x_2^3 = 0.$$

Hieraus folgt

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} = a_{112}\,x_2, \quad \frac{1}{6}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial x_1\,\partial x_2} = a_{112}\,x_1 + a_{122}\,x_2, \quad \frac{1}{6}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial x_1\,\partial x_3} = a_{133}\,x_3,$$

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = a_{112}\,x_1 + a_{122}\,x_2, \quad \frac{1}{6}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial x_2\,\partial x_3} = 0, \quad \frac{1}{6}\cdot\frac{\partial_2 F}{\partial x_3^2} = a_{133}\,x_1.$$

Die Hessesche Kurve hat daher die Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_{112}\,x_2, & a_{112}\,x_1 + a_{122}\,x_2, & a_{133}\,x_3 \\ a_{112}\,x_1 + a_{122}\,x_2, & a_{122}\,x_1 + a_{222}\,x_2, & 0 \\ a_{133}\,x_3, & 0 & a_{133}\,x_1 \end{vmatrix} =$$

$$- a_{112}^2\,x_1^3 - a_{112}\,a_{122}\,x_1^2\,x_2 + (a_{112}\,a_{122} - a_{122}^2)\,x_1\,x_2^2 - a_{133}\,a_{122}\,x_1\,x_3^2$$
$$- a_{133}\,a_{222}\,x_2\,x_3^2 = 0.$$