Durch A_3 gehen vier Gerade, die noch zwei Wendepunkte enthalten; ist

$$D \equiv d_1 x_1 + d_2 x_2 = 0,$$

deren eine, so mufs für ein gewisses q und c_x die Identität gelten

$$F + q\,H \equiv c_x^2 (d_1 x_1 + d_2 x_2).$$

Die Vergleichung der einzelnen Glieder führt auf die Gleichungen

13) $$-q\,a_{112}^2 = c_{11}\,d_1,$$

14) $$3a_{112} - q\,a_{112}\,a_{122} = c_{11}\,d_2 + 2c_{12}\,d_1,$$

15) $$0 = 2c_{13}\,d_1,$$

16) $$3a_{112} + q\,(a_{112}\,a_{222} - a_{122}^2) = 2c_{12}\,d_2 + 2c_{22}\,d_1,$$

17) $$0 = 2c_{13}\,d_2 + 2c_{23}\,d_1,$$

18) $$3a_{133} - q\,a_{133}\,a_{122} = c_{33}\,d_1,$$

19) $$a_{222} = c_{22}\,d_2,$$

20) $$0 = 2c_{23}\,d_2,$$

21) $$-q\,a_{133}\,a_{222} = c_{33}\,d_2.$$

Aus 15) und 20) folgt in Übereinstimmung mit 17) $c_{13} = c_{23} = 0$. Aus 18) und 21) folgt

22) $$\frac{d_1}{d_2} = \frac{a_{122}\,q - 3}{a_{222}\,q}.$$

Entfernt man c_{11}, c_{12} und c_{22} aus 13) 14) 16) und 19), so ergibt sich eine verschwindende homogene Funktion 3. Grades von d_1 und d_2. Setzt man hier das unter 22) gefundene Verhältnis ein, so kommt man für q auf die Gleichung

23) $$q^4 - \frac{4a_{112}\,(2a_{122}^2 - 3a_{222}\,a_{112})}{(a_{122}^2 - a_{112}\,a_{222})^2}\,q^3 + \frac{18}{a_{122}^2 - a_{112}\,a_{222}}\,q^2 - \frac{27}{(a_{122}^2 - a_{112}\,a_{222})^2} = 0.$$

Die linke Seite erhält für $q = -\infty, 0, +\infty$ die Werte $+\infty, -27:(\ )^2, +\infty$; folglich hat 23) unter allen Umständen zwei reale Wurzeln von ungleichen Vorzeichen.

Durch jeden realen Wendepunkt gehen daher wenigstens zwei reale Gerade, deren jede noch zwei Wendepunkte enthält.

Die durch die Wurzeln der Gleichung

$$q^4 + p_1\,q^3 + p_2\,q^2 + p_3\,q + p_4 = 0$$

bestimmten Elemente sind äquianharmonisch, wenn

24) $$p_2^2 + 12p_4 - 3p_1\,p_3 = 0.$$

Bei 23) ist

$$p_2^2 = \frac{324}{(a_{122}^2 - a_{112}\,a_{222})^2}, \qquad 12p_4 = -\frac{324}{(a_{122}^2 - a_{112}\,a_{222})}, \qquad p_3 = 0,$$

folglich ist die Bedingung 23) der Äquianharmonie erfüllt. Hieraus folgt, dafs 23) nicht vier reale Wurzeln haben kann, folglich neben den zwei oben nachgewiesenen realen q^{I} und q^{II} noch zwei konjugiert komplexe q^{III} und q^{IV} hat. Die auf den zu q^{III} und q^{IV} gehörigen Geraden D^{III} und D^{IV}