behandeln sie ganz kurz am Schlusse, weil sie sich leicht auf den vorigen Fall zurückführen lassen. Die eingangs erwähnten Sätze erscheinen nunmehr als Sonderfälle einer allgemeineren Theorie und gewinnen dadurch auch — wenigstens hinsichtlich des Verlaufes einer Schraubenlinie über den ganzen Zylinder hinweg — eine gewisse Ergänzung.

2. Unter Anwendung der in Fig. 1 angegebenen Bezeichnungen können wir eine Trochoide darstellen durch die Gleichungen

$$(1)\quad \begin{cases} x = (R + r)\cos\omega + h\cos\dfrac{R + r}{r}\,\omega, \\ y = (R + r)\sin\omega + h\sin\dfrac{R + r}{r}\,\omega. \end{cases}$$

Dabei erhalten wir bereits alle möglichen Fälle, wenn wir

$$(2)\qquad R > 0, \quad r \geqq -\frac{R}{2}$$

annehmen, und zwar ist bei den Epitrochoiden

$$(2a)\qquad r > 0, \quad h > 0$$

und bei den Hypotrochoiden

$$(2b)\qquad 0 \geqq r > -\frac{R}{2}, \quad h < 0.$$

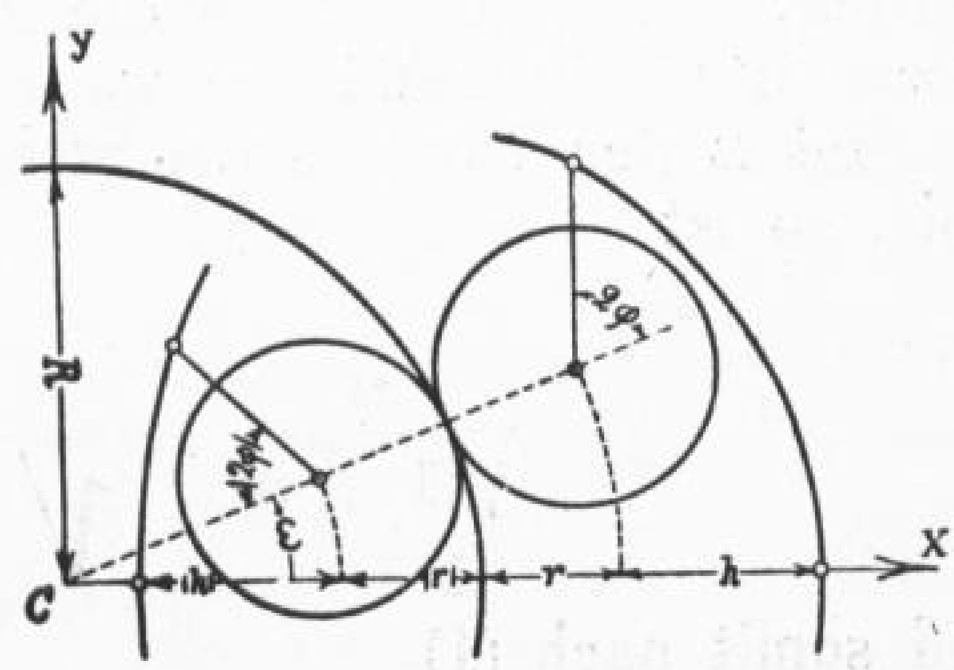

Fig. 1.

Die Scheitel jeder Trochoide liegen auf den um den Mittelpunkt C geschlagenen Kreisen, deren Halbmesser

$$(3)\qquad r_1 = R + r + h, \quad r_2 = R + r - h$$

sind, und sind Berührungspunkte zwischen der Trochoide und den beiden Kreisen.

Weil nach (2) und (3)

$$r_1^2 - r_2^2 = 4h(R + r), \quad R + r > 0$$

ist, haben wir bei der Epitrochoide $r_1^2 > r_2^2$ und bei der Hypotrochoide $r_2^2 > r_1^2$; bei der ersten ist $r_1 > 0$, $r_2 \gtreqless 0$ und bei der zweiten $r_2 > 0$, $r_1 \gtreqless 0$. Immer hat also der äußere Kreis einen positiven Halbmesser, während der Halbmesser des inneren Kreises positiv oder negativ sein kann; dieser Vorzeichenwechsel hängt zusammen mit der Seite, auf der die Trochoide von dem inneren Kreis berührt wird. In allen Fällen aber liegen alle Punkte der Trochoide in dem Kreisringe, den die beiden Kreise begrenzen; denn es ist nach (1) und (3)

$$\varrho^2 = x^2 + y^2 = r_1^2\left(1 - \frac{4h(R + r)}{r_1^2}\sin^2\frac{R}{2r}\,\omega\right)$$

oder

$$\varrho^2 = r_1^2 - (r_1^2 - r_2^2)\sin^2\frac{R}{2r}\,\omega = r_2^2 - (r_2^2 - r_1^2)\cos^2\frac{R}{2r}\,\omega,$$

und hieraus folgt, daſs ϱ^2 stets in dem Intervalle zwischen r_1^2 und r_2^2 enthalten ist.