die Doppelpunktstangenten mit der z-Achse den Winkel $arc\,tg \sqrt{\frac{m}{1-m}}$; dieser aber ist, weil jetzt $m = \frac{4r(R+r)}{(R+2r)^2}$ und somit $\sqrt{\frac{m}{1-m}} = \pm \frac{2\sqrt{r(R+r)}}{R}$ ist, gerade der Komplementwinkel zu dem Steigungswinkel der von uns betrachteten Schraubenlinie.

Der Grenzwert $p = -\infty$ tritt, wie wir schon in Nr. 2 bemerkt haben, nur gleichzeitig mit $r_1 = 0$ auf; dabei ist $h = -(R+r)$, $r_2 = 2(R+r)$, $r_1^2 p = -4(R+r)^2$. Wir haben es hier mit einem hypotrochoidischen Zylinder zu tun, dessen innere Scheitelkanten in der z-Achse vereinigt sind; die beiden Zylinder, die in der Konstruktion zu Fall (IV) eine Rolle spielen, berühren einander, da jetzt $w = a$ ist; deshalb hat, ebenso wie ihre Durchdringungskurve auch die Meridiankurve unserer Umdrehungsfläche Doppelpunkte, und zwar dort, wo $\varrho = r_1 = 0$, d. h. wo $\varphi = 0$, $\pm\pi$, $\pm 2\pi, \ldots$ ist. Auch hier bestimmen wir die Doppelpunktstangenten; aus (5), (6), (7) folgt unter den jetzigen Voraussetzungen $\frac{d\varrho}{dz} = \sqrt{\frac{m\cos^2\varphi}{1-m\sin^2\varphi}}$, und somit bilden die Doppelpunktstangenten mit der z-Achse den Winkel $arc\,tg\sqrt{m}$; dieser ist, weil $m = \frac{4|r|(R+r)}{R^2}$, wiederum der Komplementwinkel des Steigungswinkels der betrachteten Schraubenlinie.

Die letzten beiden Sonderfälle sind also ganz gleichartig. Aufserdem möge noch darauf hingewiesen werden, dafs die Verhältnisse besonders übersichtlich werden, wenn $r = -\frac{R}{2}$ ist, wenn also der hypotrochoidische Zylinder in einen elliptischen Zylinder übergeht.

6. Zum Schlufs wollen wir noch kurz die Schraubenlinien auf den Zylindern behandeln, die eine Zykloide zum Normalschnitt haben. Einen solchen Zylinder können wir unter Anwendung der in Fig. 4 angegebenen Bezeichnungen darstellen durch

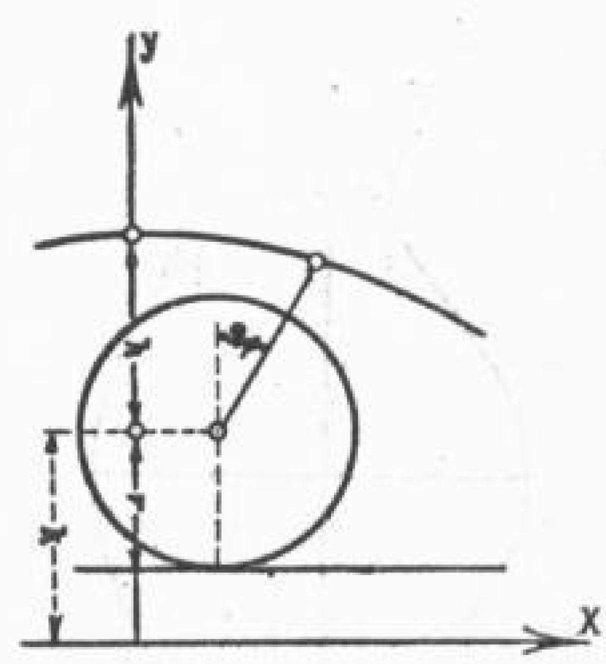

Fig. 4.

$$(11)\qquad \begin{cases} x = 2\,r\,\varphi + h\sin 2\varphi \\ y = \;\;k \;\;+ h\cos 2\varphi \end{cases}$$

mit

$$r > 0,\quad h > 0$$

und finden für die Schraubenlinie mit dem Steigungswinkel $arc\,tg\,n$

$$(12)\qquad \frac{dz}{d\varphi} = 2\,n\,(r+h)\sqrt{1 - m\sin^2\varphi}$$

mit

$$m = \frac{4\,r\,h}{(r+h)^2},\quad 0 < m \leqq 1.$$

Wenn wir zu (12) die zweite Gleichung (11) hinzunehmen, so erhalten wir in der yz-Ebene den Normalschnitt eines Zylinders, der die Schraubenlinie in unseren zykloidischen Zylinder einschneidet. Wie in Nr. 3 finden wir den Satz: