ferner

$$
\begin{aligned}
a_{2n} &= a_{n+1}^2 - a_{n-1}^2 \\
a_{2n+1} &= a_{n+1}^2 + a_n^2 \\
a_{2n-1} &= a_n^2 + a_{n-1}^2 \\
a_{2n+1} &= a_n\, a_{n+2} + a_{n+1}\, a_{n-1} \\
a_{2n} &= a_n\,(a_{n+2} - a_{n-2}) \\
a_{n+1}\, a_n + (-1)^n &= a_{n+2}\, a_{n-1} \\
a_{2n+2} - a_{2n-2} &= a_{n+2}^2 - 2a_n^2 + a_{n-2}^2
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Die Gleichungen (5) besagen übrigens, dafs die Zahlenfolge

$$\ldots 2\varrho - 3,\ 2 - \varrho,\ \varrho - 1,\ 1,\ \varrho,\ \varrho + 1,\ 2\varrho + 1,\ 3\varrho + 2,\ 5\varrho + 3 \ldots \tag{11}$$

eine geometrische ist, denn sie ist identisch mit der Zahlenfolge

$$\ldots \frac{1}{\varrho^3},\ \frac{1}{\varrho^2},\ \frac{1}{\varrho},\ 1,\ \varrho,\ \varrho^2,\ \varrho^3,\ \varrho^4,\ \varrho^5 \ldots$$

Da ϱ ein unechter Bruch ist, so werden die Glieder der Zahlenfolge links schliefslich beliebig klein, während sie nach rechts über alle Grenzen wachsen. Man kann aber aufserdem zeigen, dafs die Zahlen beim Fortschreiten nach rechts sich beliebig wenig von ganzen Zahlen unterscheiden, denn nach (6a) und (6b) ist

$$
\begin{aligned}
\varrho^n &= a_n \varrho + a_{n-1} \\
(-1)^n \varrho^{-n} &= -a_n \varrho + a_{n+1}
\end{aligned}
$$

und durch Zusammenfassung dieser beiden Gleichungen kommt

$$\varrho^n = b_n \pm \varrho^{-n}, \tag{12}$$

wobei

$$b_n = a_{n+1} + a_{n-1} \tag{13}$$

wieder eine ganze Zahl ist.

Wenn man in Gleichung (12) n beliebig wachsen läfst, so ergibt sich, weil $\varrho > 1$

$$\lim_{n=\infty} (\varrho^n - b_n) = 0$$

d. h. die Zahl ϱ^n unterscheidet sich schliefslich beliebig wenig von der ganzen Zahl b_n. Es ist z. B., wenn man für ϱ einen genügend genauen Wert einsetzt,

$$
\begin{aligned}
\varrho^{20} &= 6765\varrho + 4181 = 15126,\ 999\ 954\ 9 \\
b_{20} &= 15127
\end{aligned}
$$

Die Zahlenfolge b ist also

$$
\begin{array}{lcccccccc}
b) & & 1 & 3 & 4 & 7 & 11 & 18 & 29 \ldots \\
a) & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 13 \ldots
\end{array}
\tag{14}
$$

wobei die Zahlenfolge der a darunter gesetzt ist, um das Bildungsgesetz der Folge b gemäfs Gleichung (13) sichtbar zu machen. Für die Zahlenfolge b) gelten u. a. die Beziehungen

$$
\begin{aligned}
a_{2n} &= a_n\, b_n \\
b_n^2 &= b_{n+1}\, b_{n-1} + 5(-1)^n \\
b_n\, b_{n+1} &= 5\, a_n\, a_{n+1} + 2\,(-1)^n
\end{aligned}
\tag{15}
$$