Aus den vorhergehenden Betrachtungen geht nun bereits hervor, dafs die Brüche

$$\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_2}, \ldots\ldots \frac{a_{n+1}}{a_n}, \ldots\ldots \tag{16}$$

die Zahl $\varrho$ mit beliebiger Genauigkeit darstellen, denn aus der Gleichung

$$(-1)^n \varrho^{-n} = a_{n+1} - a_n \varrho \tag{6b}$$

folgt für unbegrenzt wachsendes $n$, weil $\varrho$ ein unechter Bruch ist,

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \varrho \tag{17}$$

Dazu ergibt sich aus (9), dafs die aufeinander folgenden Brüche der Folge (16) um den Wert $\varrho$ oszillieren.

Die Zahl $\varrho$ wird also nach (16) durch die Näherungsbrüche

$$\frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13} \ldots\ldots$$

mit beliebiger Genauigkeit dargestellt.

Die nach rückwärts fortgesetzte Zahlenfolge (vgl. 8a) gibt die Näherungsbrüche

$$\ldots\ldots -\frac{8}{13}, -\frac{5}{8}, -\frac{3}{5}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}$$

definiert also die 2. Wurzel $-\frac{1}{\varrho}$ der quadratischen Gleichung (1).

Es lassen sich aber noch allgemeinere Näherungsbrüche für die Zahl $\varrho$ aufstellen, wenn man die Gleichung

$$P + Q\varrho = \varrho^n (p + q\varrho) \tag{18}$$

ansetzt, wobei $P$ und $Q$ ganze Zahlen sein sollen, wenn man also voraussetzt, dafs jeder in $\varrho$ lineare Ausdruck $P + Q\varrho$ die Abscheidung des Faktors $\varrho^n$ ($n$ ganz) gestattet, derart, dafs ein linearer Faktor $p + q\varrho$ ($p$ und $q$ ganz) übrig bleibt. Dafs diese Voraussetzung zutrifft, leuchtet ein, wenn man in (18) den Faktor $\varrho^n$ nach (6a) durch einen in $\varrho$ linearen Ausdruck ersetzt. Man erhält dann eine Gleichung von der Form

$$M + N\varrho = 0, \tag{19}$$

in der $M$ und $N$ rationale Zahlen sind, die aber notwendigerweise verschwinden müssen, weil andernfalls die Zahl $\varrho$ sich durch den rationalen Bruch $-\frac{M}{N}$ ausdrücken liefse, was unmöglich ist, weil $\varrho$ irrational ist. Man kann also in (18) den Koeffizienten der Glieder mit $\varrho$ für sich $= 0$ setzen, ebenso die Gesamtheit der von $\varrho$ freien Glieder und erhält damit

$$\begin{aligned} p &= (-1)^n \{Q a_n - P a_{n+1}\} \\ q &= (-1)^n \{P a_n - Q a_{n-1}\} \end{aligned} \tag{20}$$

Damit ist die Richtigkeit der Gleichung (18) dargetan, denn nach (20) lassen sich stets zwei ganze Zahlen $p$ und $q$, welche (18) genügen, berechnen.

Läfst man jetzt in (18) $n$ über alle Grenzen wachsen, so bleibt die linke Seite unverändert, $\varrho^n$ wächst über alle Grenzen und es wird

$$\lim_{n=\infty} (p + q\varrho) = 0 \tag{21}$$

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
SMWK
ISIS Naturwissenschaftliche Gesellschaft zu Dresden e.V.