oder mit anderen Worten, die Zahl $-\frac{p}{q}$ ist ein rationaler Näherungswert von ϱ. Setzt man noch $z = -\frac{P}{Q}$, so wird

$$\varrho = \lim_{n=\infty}\left(-\frac{p}{q}\right) = \lim_{n=\infty}\frac{a_{n+1}z + a_n}{a_n z + a_{n-1}} \tag{22}$$

worin für z jede beliebige rationale Zahl gesetzt werden kann. Jede einzelne Annahme für z gibt eine unbegrenzte Folge von Näherungsbrüchen der Zahl ϱ.

Die Annahme $z = 0$ gibt aus (22) die Folge

$$0,\ \frac{1}{0},\ \frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{3}\ \ldots\ldots$$

also die schon oben abgeleiteten Brüche $\frac{a_{n+1}}{a_n}$. (16)

Die Annahmen $z = 1$ und $z = 2$ ergeben nichts Neues, weil $z = 1$ und $z = 2$ schon selbst Näherungsbrüche der Folge $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ sind. Die Annahme $z = 3$ gibt die Näherungsbrüche

$$3,\ \frac{4}{3},\ \frac{7}{4},\ \frac{11}{7},\ \frac{18}{11}\ \text{usw.},$$

d. h. also, die Reihe der Zahlen b [(13) und (14)] gibt gleichfalls eine unbegrenzte Reihe von Näherungsbrüchen $\frac{b_{n+1}}{b_n}$. Die Annahme $z = 4$ gibt die Brüche

$$\frac{4}{1},\ \frac{5}{4},\ \frac{9}{5},\ \frac{14}{9},\ \frac{23}{14}\ \ldots\ldots$$

Die Gleichung (22) in Verbindung mit (7) zeigt, dafs auch hier bei jeder Annahme für z aus den beiden ersten Näherungsbrüchen die folgenden durch einfache Additionen hergeleitet werden können. Man kann die doppelt unendlich vielen rationalen Näherungsbrüche für ϱ auch durch die Folge

$$\frac{z}{1},\ \frac{z+1}{z},\ \frac{2z+1}{z+1},\ \frac{3z+2}{2z+1},\ \frac{5z+3}{3z+2}\ \ldots\ldots \tag{23}$$

darstellen, die für jedes rationale z eine unbegrenzte Folge von Näherungsbrüchen gibt.

Zu den vorstehenden Ergebnissen kann man auch durch Kettenbruchentwickelungen gelangen. Wenn man nämlich die Gleichung (1) in der Form

$$\varrho = 1 + \frac{1}{\varrho}$$

schreibt, so wird man durch wiederholte Anwendung dieser Darstellungsweise zu der Entwickelung

$$\varrho = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1\ldots}}} \tag{24}$$