bilden, deren Partialsummen, von einem festen Faktor abgesehen, die Näherungsbrüche $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ sind.

Den vorstehenden Darstellungen der Zahl ϱ durch rationale Näherungsbrüche steht die Darstellung durch einen geschlossenen Wurzelausdruck

$$\varrho = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1) \tag{26}$$

gegenüber, der sich durch direkte Auflösung der quadratischen Gleichung (1) ergibt. Aus den Gleichungen (6a) und (6b) ergibt sich dann, daſs auch jede positive und negative Potenz von ϱ sich durch $\sqrt{5}$ ausdrücken läſst, z. B.

$$\varrho^4 = \frac{1}{2}(3\sqrt{5} + 7); \qquad \frac{1}{\varrho^4} = \frac{1}{2}(7 - 3\sqrt{5}).$$

Im Anschlusse an die Gleichungen (6) ergibt sich für die Zahl ϱ weiter die Eigenschaft, daſs jede positive oder negative Potenz eines in ϱ linearen Ausdrucks von der Form $a + b\varrho$ (a und b der Einfachheit halber ganzzahlig angenommen) sich in der Form

$$(a + b\varrho)^n = p_n + q_n \varrho \tag{27}$$

darstellen läſst, wobei, wie man durch Entwickelung nach dem binomischen Satze und auf Grund von (6) leicht erweisen kann, die Koeffizienten p_n und q_n durch

$$p_0 = 1 \qquad q_0 = 0$$

und die Rekursion

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= b p_n + (a + b) q_n \\ p_{n+1} &= a p_n + b q_n \end{aligned} \tag{28}$$

bestimmt sind. Analog kann man ansetzen

$$(a + b\varrho)^{-n} = p_{-n} + q_{-n}\varrho \tag{29}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} p_{-1} &= \frac{a + b}{a^2 - b^2 + ab} \\ q_{-1} &= \frac{-b}{a^2 - b^2 + ab} \end{aligned} \tag{30}$$

und die übrigen Koeffizienten bestimmen sich durch die Rekursion

$$\begin{aligned} p_{-n-1} &= \frac{(a + b) p_{-n} - b q_{-n}}{a^2 - b^2 + ab} \\ q_{-n-1} &= \frac{a q_{-n} - b p_{-n}}{a^2 - b^2 + ab} \end{aligned} \tag{31}$$

Ferner ist allgemein (a, b, c, d rational)

$$\frac{a + b\varrho}{c + d\varrho} = \frac{a(c + d) - bd}{c^2 - d^2 + cd} + \frac{bc - ad}{c^2 - d^2 + cd}\varrho \tag{32}$$

Mit Hilfe der Gleichungen (27) und (28) läſst sich die Frage entscheiden, in welchen Fällen sich aus einem Ausdruck von der Form $p + q\varrho$ (p und q ganze teilerfremde Zahlen) die Quadratwurzel ziehen läſst, also die Frage: Wie müssen die Zahlen p und q beschaffen sein, damit man die Gleichung

$$\sqrt{p + q\varrho} = a + b\varrho$$