(a und b ganze Zahlen) ansetzen kann? Die Gleichungen (27) und (28) zeigen, daſs die Beziehungen

$$\begin{aligned} p &= a^2 + b^2 \\ q &= 2ab + b^2 \end{aligned} \tag{33}$$

bestehen müssen. Die Zahlen p und $p + q$ müssen also beide in zwei Quadrate zerlegbar sein, wenn sich die Quadratwurzel aus $p + q\varrho$ ziehen lassen soll. Die Möglichkeit der Zerlegung oder deren Unmöglichkeit wird nach bekannten Sätzen der Zahlentheorie untersucht. Gegebenen Falles führt man dann für eine der beiden Zahlen, etwa für p, die Zerlegung aus, die nach Befinden — bei zusammengesetztem ungeradem p — auf zwei Weisen möglich sein kann und sieht nach, ob die so gefundenen Zahlen a und b der Gleichung (33) für q entsprechen. Man findet so Ausdrücke, wie

$$\sqrt{49 + 12\sqrt{5}} = \sqrt{34 - 5\varrho} = 3 - 5\varrho = 2 + 3\sqrt{5}$$

$$\sqrt{129 + 56\sqrt{5}} = \sqrt{73 + 112\varrho} = 3 + 8\varrho = 7 + 4\sqrt{5}$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}(87 - 13\sqrt{5})} = \sqrt{50 - 13\varrho} = 7 - \varrho = \tfrac{1}{2}(13 - \sqrt{5}).$$

Den oben abgeleiteten rationalen Näherungswerten der Zahl ϱ stehen die irrationalen Näherungswerte gegenüber. Zunächst ist klar, daſs zu jeder rationalen Zahlenfolge $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, die die Zahl ϱ definiert, eine irrationale Zahlenfolge $\sqrt[n]{a_n}$ gehört, die sich demselben Zahlenwert ϱ nähert, denn es ist

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n=\infty} \sqrt[n]{a_n} \tag{34}$$

So wird also z. B. die Zahl ϱ durch die Zahlenfolge

$$\sqrt{1},\ \sqrt[3]{2},\ \sqrt[4]{3},\ \sqrt[5]{5},\ \sqrt[6]{8},\ \sqrt[7]{13},\ \sqrt[8]{21},\ \sqrt[9]{34},\ \sqrt[10]{55}\ \ldots.$$

oder aus den b nach (14) durch

$$1,\ \sqrt{3},\ \sqrt[3]{4},\ \sqrt[4]{7},\ \sqrt[5]{11},\ \sqrt[6]{18},\ \sqrt[7]{29},\ \sqrt[8]{34},\ \sqrt[9]{76},\ \sqrt[10]{123}\ \ldots.$$

definiert, von denen die erste allerdings nur sehr langsam konvergiert, während bei der zweiten schon der 10. Näherungswert um weniger als 5 Einheiten der 5. Dezimale vom wahren Werte von ϱ abweicht. Übrigens nähert sich diesem Werte die erste Zahlenfolge von unten, während die zweite wieder oszilliert.

Allgemeine Formeln für irrationale Zahlenfolgen finden sich, wenn man den oben benutzten Cauchyschen Grenzwertsatz (34) auf Gleichung (22) anwendet. Es zeigt sich dann, daſs für jedes z der Ausdruck

$$\sqrt[n]{a_n z + a_{n-1}}$$

eine die Zahl ϱ definierende Zahlenfolge ergibt, wenn n nacheinander die natürlichen Zahlen durchläuft. Für die Werte $z = \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5} \ldots$

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
SMWK
Naturwissenschaftliche Gesellschaft ISIS zu Dresden e.V.