ergeben sich die Zahlenfolgen

$$\sqrt{2},\ \sqrt[3]{3},\ \sqrt[4]{5},\ \sqrt[5]{8},\ \sqrt[6]{13},\ \sqrt[7]{21},\ \sqrt[8]{34}\ \ldots.$$
$$\sqrt{3},\ \sqrt[3]{5},\ \sqrt[4]{8},\ \sqrt[5]{13},\ \sqrt[6]{21},\ \sqrt[7]{34},\ \sqrt[8]{55}\ \ldots.$$
$$\sqrt{\tfrac{5}{2}},\ \sqrt[3]{4},\ \sqrt[4]{\tfrac{13}{2}},\ \sqrt[5]{\tfrac{21}{2}},\ \sqrt[6]{17},\ \sqrt[7]{\tfrac{55}{2}},\ \sqrt[8]{\tfrac{89}{2}}\ \ldots.$$
$$\sqrt{\tfrac{8}{3}},\ \sqrt[3]{\tfrac{13}{3}},\ \sqrt[4]{7},\ \sqrt[5]{\tfrac{34}{3}},\ \sqrt[6]{\tfrac{55}{3}},\ \sqrt[7]{\tfrac{89}{3}},\ \sqrt[8]{48}\ \ldots.$$
$$\sqrt{\tfrac{13}{5}},\ \sqrt[3]{\tfrac{21}{5}},\ \sqrt[4]{\tfrac{34}{5}},\ \sqrt[5]{11},\ \sqrt[6]{\tfrac{89}{5}},\ \sqrt[7]{\tfrac{144}{5}},\ \sqrt[8]{\tfrac{233}{5}}\ \ldots.$$

usw.

Noch gröſsere Konvergenz zeigt die Zahlenfolge

$$\sqrt{2},\ \sqrt[4]{8},\ \sqrt[6]{17},\ \sqrt[8]{48},\ \sqrt[10]{122},\ \sqrt[12]{323},\ \ldots\ldots \sqrt[20]{15128},\ \ldots.$$

mit dem allgemeinen Gliede

$$\sqrt[2n]{b_n^2 - (-1)^n} = \sqrt[2n]{b_{n-1}\, b_{n+1} + 4\,(-1)^n}.$$

Der 10. Näherungswert dieser Zahlenfolge

$$\sqrt[20]{15128} = 1{,}618034\ \ldots.$$

ist in der 6. Dezimale richtig, während der 10. Näherungswert der Zahlenfolge $\frac{a_{n+1}}{a_n}$

$$\frac{89}{55} = 1{,}618182$$

noch um 148 Einheiten der 6. Dezimale vom wahren Werte von ϱ abweicht.

Der auf die rationale Zahlenfolge $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ führenden Kettenbruchentwickelung (24) steht als irrationales Anologon gegenüber die Entwickelung

$$\varrho = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 \ldots}}}},$$

denn die Gleichung (1) gibt

$$\varrho = \sqrt{1 + \varrho} = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \varrho}} = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \varrho}}}\ \text{usw.}$$

Der Nachweis, daſs die Näherungswurzeln

$$1,\ \sqrt{1+1} = 1{,}41\ldots,\ \sqrt{1+\sqrt{2}} = 1{,}55\ldots,\ \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}} = 1{,}598\ldots$$

nach ϱ konvergieren, läſst sich auf elementare Weise führen. Die 10. Näherungswurzel ist bereits auf 4 Dezimalen richtig. In arithmetischer Hinsicht ist ferner von Interesse, daſs sich die Zahlen a_n in folgender Weise zerlegen lassen: