$$
\begin{aligned}
a_1 &= 1 \\
a_2 &= 1 \\
a_3 &= 1 + 1 \\
a_4 &= 1 + 2 \\
a_5 &= 1 + 3 + 1 \\
a_6 &= 1 + 4 + 3 \\
a_7 &= 1 + 5 + 6 + 1
\end{aligned}
$$

usw.

In der 1. Spalte rechts stehen lauter Einsen, in der 2. Spalte die natürlichen Zahlen (figurierten Zahlen 1. Ordnung), in der 3. Spalte die figurierten Zahlen 2. Ordnung (Dreieckszahlen) usw. Im übrigen enthält das obige Schema auch die Binomialkoeffizienten oder das Pascalsche Dreieck in schiefer Anordnung. Die durch dieses Schema dargestellten Zusammenhänge lassen sich leicht allgemein nachweisen.

Schliefslich kann noch erwähnt werden, dafs man die Zahl π leicht durch ϱ ausdrücken kann, indem man die Reihe für arc sin x auf $x = \frac{\pi}{10}$ anwendet. Man findet dann [vgl. weiter unten Gleichungen (43)] die unendliche Reihe

$$\frac{\pi}{5} = \varrho - 1 + \frac{1}{24}(2\varrho - 3) + \frac{3}{640}(5\varrho - 8) + \frac{5}{7168}(13\varrho - 21) + \ldots .$$

Berechnet man sich also ϱ, z. B. mit Hilfe eines der Näherungswerte $\frac{b_{n+1}}{b_n}$, auf genügend viele Stellen ($\varrho = 1{,}618\ 033\ 988\ 749\ 894\ 848$), so läfst sich $\frac{\pi}{5}$ mit entsprechender Genauigkeit durch obige schnell konvergierende Reihe auswerten. Es ist somit die transzendente Irrationalität π durch eine nach einer algebraischen Irrationalität ϱ fortschreitende unendliche Reihe ausgedrückt.

II. Geometrische Betrachtungen.

Den Eingang in die Geometrie gewinnen wir durch die Definition: Eine Strecke mit den Abschnitten a und b ($b > a$) heifst nach dem goldenen Schnitt geteilt, wenn das Verhältnis der Mafszahlen der beiden Abschnitte durch die Zahl ϱ dargestellt wird, wenn also

$$\frac{b}{a} = \varrho \qquad \text{und} \qquad \varrho^2 = \varrho + 1 \tag{35}$$

ist. Durch Zusammenfassung dieser beiden Gleichungen erhalten wir

$$\frac{b + a}{b} = \frac{b}{a} \tag{35a}$$

d. h.: Wenn eine Strecke nach dem goldenen Schnitt geteilt ist, dann verhält sie sich zu ihrem gröfseren Abschnitt, wie dieser zum kleineren.

Es handelt sich nun um die Konstruktion der Zahl ϱ, wenn die Strecke von der Länge 1 gegeben ist. Die Konstruktion ergibt sich sofort mit dem Sekantensatz aus der Gleichung $\varrho(\varrho - 1) = 1$. Man trägt (Abb. 1) in einem beliebigen Punkte des Kreises mit dem Durchmesser 1 eine Tangente von der Länge 1 an und verbindet deren freien Endpunkt T mit