Wiederholung der Konstruktion entsteht, ist $\frac{1}{\varrho^4}$. Die Kreishalbmesser nehmen also nach einer geometrischen Reihe im Verhältnis

$$1 : \varrho^2 = (2 - \varrho) : 1$$

unbegrenzt ab.

Weil nach (39)

$$s_5^2 = 3 - \varrho = 1 + 2 - \varrho = 1 + \frac{1}{\varrho^2} = s_6^2 + s_{10}^2$$

ist — vgl. $\triangle$ *OBC* in Abb. 3 —, so läſst sich aus Sechseckseite und Zehneckseite als Katheten ein rechtwinkliges Dreieck bilden, dessen Hypotenuse die Fünfeckseite ist. In gleicher Weise lassen sich zu rechtwinkligen Dreiecken zusammensetzen die Gröſsen

$$s_6,\ d_{10},\ d_5 \qquad\qquad s_{10},\ d_{10},\ \sqrt{3}$$
$$s_5,\ d_5,\ \sqrt{5} \qquad\qquad s_5,\ d_{10},\ 2$$
$$s_{10},\ d_5,\ 2$$

wobei jedesmal die Hypotenuse an die letzte Stelle gesetzt ist.

Es steht mit den obigen Betrachtungen über die Fünfteilung des Kreises im Zusammenhang, daſs sich die nachstehenden geometrischen Funktionen durch ϱ und ϱ' rational ausdrücken lassen:

$$\begin{array}{ll} \sin 18^0 = \dfrac{1}{2\varrho} & \sin 36^0 = \dfrac{\varrho'}{2\varrho} \\ \cos 18^0 = \dfrac{\varrho'}{2} & \cos 36^0 = \dfrac{\varrho}{2} \\ \tan 18^0 = \dfrac{1}{\varrho\varrho'} & \tan 36^0 = \dfrac{\varrho'}{\varrho^2} \\ \operatorname{ctg} 18^0 = \varrho\varrho' & \operatorname{ctg} 36^0 = \dfrac{\varrho^2}{\varrho'} \end{array} \tag{43}$$

Weil man wegen $\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$ aus Sechseck- und Zehneckseite die Fünfzehneckseite gewinnen kann, hat man z. B. für den Winkel 12^0 folgende Funktionsdarstellungen

$$\begin{aligned} \sin 12^0 &= \frac{1}{4}\left(\varrho' - \frac{\sqrt{3}}{\varrho}\right) \\ \cos 12^0 &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\varrho} + \varrho'\sqrt{3}\right) \\ \tan 12^0 &= \frac{1}{\varrho^2}\left(\sqrt{3} - \frac{\varrho'}{\varrho}\right) \end{aligned} \tag{44}$$

Es tritt also hier noch die Irrationalität $\sqrt{3}$ hinzu.

Hierher gehören auch noch folgende Wurzeldarstellungen für s_5, s_{10}, s_{20} usw.

$$\begin{aligned} s_5 &= \sqrt{3 - \varrho} = \frac{\varrho'}{\varrho} \\ s_{10} &= \varrho - 1 = \sqrt{2 - \varrho} \\ s_{20} &= \sqrt{2 - \varrho'} \\ s_{40} &= \sqrt{2 - \sqrt{2 + \varrho'}} \\ s_{80} &= \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \varrho'}}} \\ &\text{usw.} \end{aligned} \tag{45}$$

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
SMWK
Naturwissenschaftliche Gesellschaft ISIS zu Dresden e.V.