Die Fufspunktstransformation $\mathfrak{F}$ hat die Gleichung

(3) $$\xi^2 + \eta^2 - \xi x - \eta y = 0.$$

Die *P. H. II* sind die Kreise, die durch den Koordinatenursprung *O* gehen; jedem Punkt *A* ist der Kreis α zugeordnet, der *AO* zum Durchmesser hat. Die *G. H. II* sind, wenn wir den allen gemeinsamen Elementverein *O* ausscheiden, die Punkte des zweiten Feldes, und zwar entspricht einer Geraden *g* der Fufspunkt des aus *O* auf *g* gefällten Lotes. Also wird jede Kurve des ersten Feldes durch $\mathfrak{F}$ verwandelt in ihre Fufspunktskurve in Bezug auf *O*.

Für unseren Zweck ist es bequemer, die Fufspunktstransformation dadurch zu erweitern, dafs wir sie zusammensetzen mit der perspektiven Ähnlichkeit oder Streckung $\mathfrak{S}$ der Ebene, durch die jeder Punkt übergeht in den doppelt so weit von *O* entfernten und auf demselben Halbstrahl aus *O* gelegenen Punkt. Wir erkennen sofort, dafs $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{S}$ vertauschbar sind, und nennen die Berührungstransformation $\mathfrak{F}\mathfrak{S} = \mathfrak{S}\mathfrak{F}$ kurz die Fufspunktstransformation $\mathfrak{F}^1$. Sie hat die Gleichung

(3a) $$\xi^2 + \eta^2 - 2\xi x - 2\eta y = 0.$$

Die *P. H. II* sind wiederum die Kreise, die durch *O* laufen, aber jeder Kreis ist seinem Mittelpunkt zugeordnet. Die *G. H. II* sind wiederum die Punkte des zweiten Feldes, aber jeder Geraden entspricht der in Bezug auf sie zu *O* symmetrische Punkt; umgekehrt sind die Geraden des ersten Feldes die *P. H. I.* Die *G. H. I* sind die Parabeln, deren Brennpunkt *O* ist; jede dieser Parabeln ist ihrer Leitlinie zugeordnet. Jede Kurve des ersten Feldes wird durch $\mathfrak{F}^1$ verwandelt in die Kurve, die ihrer in Bezug auf *O* konstruierten Fufspunktskurve vermöge $\mathfrak{S}$ ähnlich ist. Die Zuordnung der Linienelemente beider Felder ist eindeutig; lassen wir in einem Felde ein Element sich um seinen Punkt drehen oder auf seiner Geraden laufen, so bewegt sich das entsprechende dazu projektiv durch den zugeordneten Elementverein des anderen Feldes.

4. Aus $\mathfrak{F}^1$ können wir weitere Berührungstransformationen dadurch ableiten, dafs wir den Punkt *O* durch einen um ihn geschlagenen „Hauptkreis“ *k* ersetzen und als *P. H. II* Kreise nehmen, die ihren Mittelpunkten zugeordnet sind und zu *k* in gesetzmäfsiger Beziehung stehen. Sollen z. B. die *P. H. II* den Hauptkreis *k* orthogonal oder diametral schneiden und hat *k* die Gleichung

$$\xi^2 + \eta^2 = r^2,$$

so erhalten wir Berührungstransformationen mit den Gleichungen

(4a) $$\xi^2 + \eta^2 - 2\xi x - 2\eta y + r^2 = 0$$

und

(4b) $$\xi^2 + \eta^2 - 2\xi x - 2\eta y - r^2 = 0.$$

In beiden Fällen sind die *P. H. II* die Kreise, deren jeder in einer Transformation durch reziproke Radien sich selbst entspricht, und zwar hat dieselbe zum Hauptkreise im ersten Fall den reellen Kreis *k* — weshalb sie mit $\mathfrak{R}$ — und im zweiten Fall den ihm konzentrischen imaginären Kreis mit dem Halbmesser $r\sqrt{-1}$ — weshalb sie mit $\mathfrak{J}$ bezeichnet sei. Eine Kurve des ersten Feldes wird in beiden Fällen übergeführt in eine anallagmatische Kurve, deren Deferent sie ist; deshalb seien die durch (4a) und (4b) definierten Berührungstransformationen anallagmatische Transformationen genannt und mit $\mathfrak{A}_r$ und $\mathfrak{A}_i$ bezeichnet, je nach dem sie von $\mathfrak{R}$ oder $\mathfrak{J}$ abhängen.

**

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
SMWK
ISIS Naturwissenschaftliche Gesellschaft zu Dresden e.V.