Parallelkurve der durch $\mathfrak{F}^1$ aus c hervorgehenden Fuſspunktskurve. Diese Kurven sind für den Fall, daſs für c Kreise von verschiedener Lage gegen k genommen werden, genau durch Herrn O. Losehand*) untersucht worden; allgemeinere Sätze, die die Herren G. Loria**) und L. Braude***) an seine Untersuchungen anknüpfend beweisen und die sich auf die Ersetzung der vorkommenden Kurven durch Parallelkurven beziehen, bedürfen bei Benutzung des Begriffes der Dilatation keines besonderen Beweises.

6. Eine weitere, die vorigen als Sonderfälle umfassende Berührungstransformation $\mathfrak{W}$ erhalten wir, wenn wir als *P. H. II* die Kreise nehmen, die den Hauptkreis k unter einem konstanten Winkel ε $\left(0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}\right)$ schneiden. Jedem Punkt des ersten Feldes ist wiederum ein Paar von Kreisen zugeordnet; ihre Gleichungen lauten

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 - (\sqrt{x^2 + y^2 - \varrho^2} \pm d)^2 = 0$$

mit

$$\varrho = r \sin \varepsilon, \; d = r \cos \varepsilon.$$

Diese Kreise entsprechen in der Dilatation $\mathfrak{D}$ mit der Konstanten $d = r \cos \varepsilon$ dem Kreise, der ihrem Mittelpunkt durch eine anallagmatische Transformation $\mathfrak{A}_{\mathfrak{r}}^*$ zugeordnet ist, und zwar hat $\mathfrak{A}_{\mathfrak{r}}^*$ zum Hauptkreise den um O mit ϱ geschlagenen Kreis k^*; also ist

$$\mathfrak{W} = \mathfrak{A}_{\mathfrak{r}}^* \, \mathfrak{D}.$$

Die Gleichung von $\mathfrak{W}$ lautet

$$(6) \quad [\xi^2 + \eta^2 - 2 \xi x - 2 \eta y - d^2 + \varrho^2]^2 - 4 d^2 (x^2 + y^2 - \varrho^2) = 0$$

und zeigt, daſs $\mathfrak{W}$ ein Beispiel von derselben Art wie $\mathfrak{B}$ ist.

Die *P. H. I* sind wiederum Kegelschnitte und zwar entspricht jedem Punkt Γ des zweiten Feldes ein Kegelschnitt c, der die Mittelpunkte der Kreise trägt, die k^* orthogonal schneiden und den um Γ mit d geschlagenen Kreis γ berühren; diese Kreise aber berühren auch den Kreis γ^*, der dem Kreise γ in der auf den Hauptkreis k^* gegründeten Transformation durch reziproke Radien $\mathfrak{R}^*$ zugeordnet ist; also hat c den Punkt Γ und den Mittelpunkt von γ^* zu Brennpunkten. Ferner berührt c den Kreis k^* doppelt mit der Berührungssehne

$$\xi^2 + \eta^2 - 2 \xi x - 2 \eta y - d^2 + \varrho^2 = 0;$$

diese Gerade ist aber, da ihre Gleichung je nach den Gröſsen von d^2 und ϱ^2 mit (3a), (4a), (4b) übereinstimmt, dem Punkt Γ in einer Fuſspunktstransformation oder in einer anallagmatischen Transformation erster oder zweiter Art als *P. H. I* zugeordnet.

Die *G. H. II* sind Kreispaare und die *G. H. I* Parabelpaare, die sich nach Nr. 4 leicht bestimmen lassen. Eine beliebige Kurve c geht durch $\mathfrak{W}$ über in eine Parallelkurve einer anallagmatischen Kurve, deren Deferent c ist.

7. Ähnliche Ergebnisse liefert die Zusammensetzung $\mathfrak{A}_{\mathfrak{t}} \mathfrak{D}$. Wenn wir aber versuchen, $\mathfrak{B}$ oder $\mathfrak{W}$ mit einer zweiten Dilatation $\mathfrak{D}_1$, deren Konstante d_1 sei, zusammenzusetzen, so erhalten wir in $\mathfrak{B}\,\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{W}\,\mathfrak{D}_1$ nichts neues. Denn es ist ja $\mathfrak{B}\,\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{F}^1 \mathfrak{D}\,\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{W}\,\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{A}_{\mathfrak{r}}^* \, \mathfrak{D}\,\mathfrak{D}_1$; $\mathfrak{D}\,\mathfrak{D}_1$ aber ordnet

*) O. Losehand: Über Kurven 16. Ordn. und 12. Kl., die bei einem Problem der Enveloppentheorie auftreten. Dissertation, Kiel 1904, und Math. Ann. 64, 1907.

**) G. Loria: Sopra certi inviluppi di cerchi. Math. Ann. 64, 1907.

***) L. Braude: Über die Einhüllenden gewisser Kreis- und Kugelscharen. Archiv der Mathematik und Physik 26, 1917.