4. Für die Schnittpunkte $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2$ (Fig. 3) von $C C_0$ mit $\mathfrak{K}$ ist $hx - py = 0$, also

$$m^2 (h - y)^2 - k^2 y^2 = 0, \; m(h - y) \mp ky = 0, \; y = \frac{mh}{m \pm k}.$$

Bei der Parabel wird $y_1 = \frac{1}{2} h$. Das Stück des Durchmessers zwischen dem Schnittpunkt zweier Tangenten und der Berührungsehne wird durch die Parabel halbiert, und $y_2 = \infty$. Bei der Hyperbel kann k imaginär werden, CC_0 ist dann ein Nebendurchmesser.

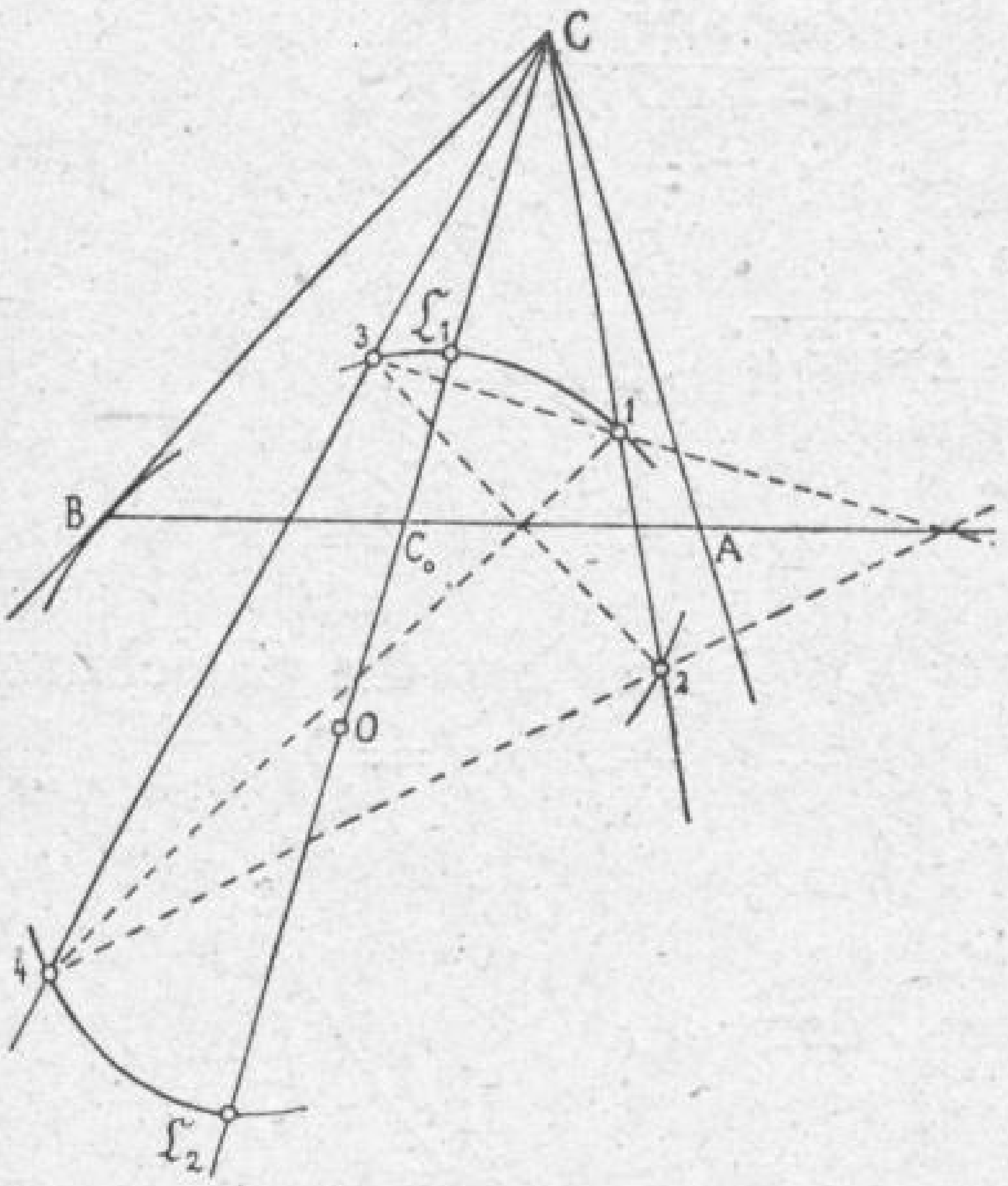

Fig. 3.

Die quadratische Gleichung für y geordnet:

$$(m^2 - k^2)\, y^2 - 2\, m^2 hy + m^2 h^2 = 0$$

ergibt

$$\frac{2\, y_1 y_2}{y_1 + y_2} = h,$$

d. h. die Punkte $C C_0$, $\mathfrak{L}_1 \mathfrak{L}_2$ liegen harmonisch.

Zieht man durch C eine beliebige Gerade, die auf der x-achse ξ abschneidet, so daſs ihre Gleichung ist

$$hx - py - \xi (h - y) = 0,$$

so ergibt sich mit der Gleichung des $\mathfrak{K}$ die quadratische

$$(m^2 - \xi^2 - k^2)\, y^2 - 2\, (m^2 - \xi^2)\, hy + (m^2 - \xi^2)\, h^2 = 0,$$

so daſs wieder

$$\frac{2\, y_1 y_2}{y_1 + y_2} = h$$

wird. Schneidet also die Gerade den $\mathfrak{K}$, so bilden die 4 auf ihr liegenden Punkte ebenfalls ein harmonisches Punktsystem.

Zieht man durch C zwei beliebige Sekanten, die $\mathfrak{K}$ in 1, 2 und 3, 4 schneiden sowie auf der x-achse die Abschnitte ξ_{12}, ξ_{34} bilden, und verbindet 1 mit 4, 2 mit 3, so erhält man aus den Gleichungen

$$hx_4 - py_4 = \xi_{34} (h - y_4), \; hx_1 - py_1 = \xi_{12} (h - y_1)$$

den Abschnitt von 1, 4 auf der x-achse:

$$\frac{y_1 x_4 - y_4 x_1}{y_1 - y_4} = \frac{\xi_{34} y_1 (h - y_4) - \xi_{12} y_4 (h - y_1)}{h(y_1 - y_4)} = \frac{\xi_{34}\left(\frac{1}{y_4} - \frac{1}{h}\right) - \xi_{12}\left(\frac{1}{y_1} - \frac{1}{h}\right)}{\frac{1}{y_4} - \frac{1}{y_1}}.$$

Ebenso folgt aus den Gleichungen:

$$hy_3 - py_3 = \xi_{34} (h - y_3), \; hx_2 - py_2 = \xi_{12} (h - y_2)$$

der Abschnitt von 2, 3 auf der x-achse:

$$\frac{y_2 x_3 - y_3 x_2}{y_2 - y_3} = \frac{\xi_{34}\left(\frac{1}{y_3} - \frac{1}{h}\right) - \xi_{12}\left(\frac{1}{y_2} - \frac{1}{h}\right)}{\frac{1}{y_3} - \frac{1}{y_2}}.$$