Wegen der harmonischen Beziehungen gilt aber

$$\frac{1}{y_4}-\frac{1}{h}=-\left(\frac{1}{y_3}-\frac{1}{h}\right),\ \frac{1}{y_4}-\frac{1}{h}=-\left(\frac{1}{y_2}-\frac{1}{h}\right),$$

$$\frac{y_1 y_2}{y_1+y_2}=\frac{y_3 y_4}{y_3+y_4},\ \frac{1}{y_4}-\frac{1}{y_1}=\frac{1}{y_2}-\frac{1}{y_3},$$

so daſs

$$\frac{y_1\,x_4-y_4\,x_1}{y_1-y_4}=\frac{\xi_{34}\left(\frac{1}{y_3}-\frac{1}{h}\right)+\xi_{12}\left(\frac{1}{y_2}-\frac{1}{h}\right)}{\frac{1}{y_2}-\frac{1}{y_3}}=\frac{y_2\,x_3-y_3\,x_2}{y_2-y_3}.$$

Es schneiden sich also 1, 4 und 2, 3 auf der x-achse, und da man die Punkte 3 und 4 vertauschen darf, ohne irgend etwas an der Rechnung zu ändern, so schneiden sich auch 1, 3 und 2, 4 auf der x-achse. Das ist die Eigenschaft der Berührungsehne als Polare von C.

5. Wenn die Punkte $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ (Nr. 4) reell und nicht unendlich sind, was bei der Ellipse zutrifft und bei der Hyperbel für $k^2 > 0$, so ist $\mathfrak{C}_1\,\mathfrak{C}_2$ ein Durchmesser und dessen Halbierungspunkt $O\,(uv)$ der Mittelpunkt des $\mathfrak{K}$. Demnach ist

$$v=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{m^2}{m^2-k^2}\,h,\ u=\frac{p}{h}\,v,$$

also bei der Ellipse immer $v<0$, d. h. der Mittelpunkt liegt in der Verlängerung von CC_0 über C_0 hinaus. In dem Fall der Hyperbel, der hier in Frage kommt, ist $v>0$, aber $v<h$, d. h. ihr Mittelpunkt liegt zwischen C_0 und C. Wenn bei der Hyperbel $k^2<0$ ist, also $\mathfrak{C}_1\,\mathfrak{C}_2$ imaginäre Punkte werden, bleibt doch v reell, wird aber gröſser als h, d. h. der Mittelpunkt liegt auf der Verlängerung von $C_0\,C$ über C hinaus.

Ist der Mittelpunkt des $\mathfrak{K}$ als gegeben anzunehmen, so ist

$$k^2=m^2\,\frac{v-h}{v}$$

und damit läſst sich die Gleichung von $\mathfrak{K}$ auch darstellen in der Form

$$(hx-py)^2-m^2\,h\left(h-2y+\frac{y^2}{v}\right)=0. \tag{4}$$

Zieht man eine zu AB parallele Sehne des $\mathfrak{K}$, nimmt also y als konstant an, so ist

$$hx-py=\pm C,$$

also

$$hx_1-py=C,\ hx_2-py=-C,\ h\,\frac{x_1+x_2}{2}-py=0,$$

d. h. der Mittelpunkt der Sehne liegt auf CC_0.

Denkt man sich eine Sehne des $\mathfrak{K}$ parallel zu CC_0, setzt also $hx-py$ als konstant voraus, so wird

$$h-2\,y+\frac{y^2}{v}=C,\ \frac{y_1+y_2}{2}=v,$$

d. h. der Mittelpunkt der Sehne liegt auf der Parallelen zu AB durch O.

Diese beiden Ergebnisse zeigen die Eigenschaften konjugierter Durchmesser.

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
SMWK
ISIS Naturwissenschaftliche Gesellschaft zu Dresden e.V.